МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

«СОГЛАСОВАНО»	«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель программы аспирантуры «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»	Директор департамента математики
____________ Степанова А.А.	_____________ /Заболотский В.С.
(подпись) (Ф.И.О.)	(подпись) (Ф.И.О.)
« 28 » июня 2022 г.	«_28__» июня 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Теория графов, гиперграфов и комбинаторика

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

курс ____2___ семестр ___3_____
лекции __8_ час. / з.е.
практические занятия ___10____час. /____ з.е.
лабораторные работы ____-___час. /____ з.е.
с использованием МАО лек._____/пр.____/лаб._____ час.
всего часов контактной работы_____72___ час.
в том числе с использованием МАО ____ час., в электронной форме 10__ час.
самостоятельная работа ____54_____ час.
в том числе на подготовку к экзамену __-___ час.
зачет _______3____ семестр
экзамен ____-_____ семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов), утвержденными Приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 20 октября 2021 г. N 951 и паспортом научной специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).
Директор департамента математики Заболотский В.С.

Составитель: Абрамов А.Л., профессор Института математики и компьютерных технологий

I. Рабочая программа актуализирована на заседании департамента математики:
Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______
Директор департамента

________________ __________________

(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа актуализирована на заседании департамента математики:
Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______
Директор департамента

________________ __________________

(подпись) (И.О. Фамилия)

АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика» предназначена для аспирантов, обучающихся по программе аспирантуры 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Трудоемкость дисциплины – 2 зачетных единицы (72 академических часа), включает в себя 10 часов практических занятий и 54 часа самостоятельной работы. Дисциплина «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика» входит в образовательный компонент учебного плана.

Дисциплина обеспечивает высокий уровень овладения аспирантами теорией графов, гиперграфов и комбинаторикой, что позволяет им использовать достижения мировой науки в научно-исследовательской и преподавательской деятельности.

Цель дисциплины: развитие способности и готовности формулировать, равновесные и экстремальные задачи на сетях и графах, разрабатывать и реализовывать алгоритмы решения задач с помощью современных программных систем, оценивать работоспособность и эффективность алгоритмов, обосновывать адекватность используемых моделей, самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий.

Задачи:

– освоить понятия, гипотезы, теоремы, модели, алгоритмы и программы, методы экспериментального исследования свойств явлений, процессов, составляющие содержание дисциплины;

–уметь использовать полученные знания и умения в научно-производственной и социально-экономической сфере.

Планируемые результаты обучения по данной дисциплине (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы:

Формулировка требования	**Этапы формирования требований**	
Готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно - образовательных задач	Знает	методы научных исследований и основы организации научно-исследовательской деятельности в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах
	Умеет	использовать современные методы исследований в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах
	Владеет	информационно-коммуникационными технологиями исследований в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах

Способность и готовность использовать современные методы и технологии, формулировать равновесные и экстремальные задачи в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах, обнаруживать соответствующие явления в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях, обосновывать адекватность используемых моделей	Знает	равновесные и экстремальные задачи на сетях и графах в экономических, финансовых, социальных, аналитических сетях, методы обоснования адекватности используемых моделей
	Умеет	обнаруживать явления, моделируемые экстремальными и равновесными постановками задач на сетях и графах, в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях, обосновывать адекватность используемых моделей
	Владеет	методами решения равновесных и экстремальных задачи на сетях и графах в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях, методами обоснования адекватности используемых моделей
Способность и готовность разрабатывать и реализовывать методы и алгоритмы решения равновесных и экстремальных задач на сетях и графах и задач обнаружения явлений «малых миров» и других подобных явлений в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях с помощью современных программных систем, оценивать работоспособность и эффективность алгоритмов	Знает	алгоритмы решения равновесных и экстремальных задач на сетях и графах и задач обнаружения явления «малых миров», методы оценки работоспособности и эффективности алгоритмов
	Умеет	разрабатывать и реализовывать алгоритмы решения равновесных и экстремальных задач на сетях и графах и задач обнаружения явления «малых миров» в экономических, финансовых, социальных и информационных сетях с помощью современных программных систем, оценивать работоспособность и эффективность алгоритмов
	Владеет	методами проектирования и разработки алгоритмов решения равновесных и экстремальных задач на сетях и графах, задач обнаружения явления «малых миров» и подобных явлений, методами оценки работоспособности и эффективности алгоритмов
Способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития	Знает	- возможные сферы и направления профессиональной самореализации, связанные с владением навыками в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах; - пути достижения более высоких уровней профессионального и личного развития, связанные с владением навыками, знаниями и умениями в области

		графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах
	Умеет	- выявлять и формулировать проблемы собственного развития, исходя из этапов профессионального роста и требований рынка труда к специалисту в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах; - формулировать цели профессионального и личностного развития, оценивать свои возможности, реалистичность и адекватность намеченных способов и путей достижения планируемых целей в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах
	Владеет	- приемами целеполагания, планирования, реализации необходимых видов деятельности в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах, оценки и самооценки результатов этой деятельности при решении профессиональных задач; - приемами выявления и осознания своих возможностей, личностных и профессионально-значимых качеств с целью их совершенствования в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах; - приемами выявления и осознания своих возможностей, личностных и профессионально-значимых качеств с целью их совершенствования в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах
Владение культурой научного исследования, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий	Знает	- культуру проведения научного исследования в соответствующей профессиональной области с использованием научной коммуникации
	Умеет	- использовать достижения современной культуры научного исследования в соответствующей профессиональной области с использованием научной коммуникации
	Владеет	- методами научного исследования, сбора и обработки научной информации и представления результатов научных исследований в соответствующей профессиональной области, в том числе с использованием научной коммуникации
Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	знает	- основные требования к личности преподавателя, уровню его подготовки в области профессиональной деятельности
	умеет	- разрабатывать методические материалы лекционные курсов, семинарских и практических занятий в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах
	владеет	основными методами, приемами и средствами использования информации в области графов, гиперграфов и комбинаторных объектов в сетях и случайных графах в преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего

		образования

I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА (8 час., и 18 час. контрольных работ)

Занятие 1. Введение в теорию графов, гиперграфов и комбинаторику (1 час.)

Графы, вершины и рёбра. Типы графов. Подграфы и операции над графами. Маршруты, пути и циклы. Связность. Компоненты связности. Дерево. Части разбиения. Точки сочленения и блоки в связном графе. Клики. Двудольные и k-дольные графы. Орграфы и ориентации. Подграфы, степени и окрестности Пути и циклы в орграфе. Ориентация графа. Корневые деревья. Дерево поиска в ширину и глубину. Эйлеров цикл и покрытие рёбер путями. Гиперграф. Иерархический гиперграф и граф Кенига. Операции композиции и декомпозиция. Изоморфизм графов. Рёберный граф. Плоские и планарные графы. Грани плоского графа. Формула Эйлера. Плоские триангуляции. Критерии планарности. Теорема Понтрягина – Куратовского. Двойственность и планарность. Алгоритм укладки графа на плоскости. Характеристики непланарных графов. Раскраски графов и гиперграфов.

Раздел 2. Кратчайшие пути (0,5 час.)

Поиск кратчайшего пути между вершинами в графе. Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути. Пример. Обоснование алгоритма Дейкстры. Алгоритм Флойда. Алгоритм Данцига. Экономические аспекты применения задачи. Поиск k кратчайших путей в графе. Алгоритм двойного поиска. Пример. Экономические аспекты применения задачи.

Раздел 3. Остовные деревья в графе (0,5 час.)

Поиск всех остовных деревьев в графе. Алгоритм построения всех остовных деревьев в графе. Пример. Обонование алгоритма построения всех остовных деревьев в графе. Экономические аспекты применения задачи. Наикратчайшее остовное дерево. Алгоритм Краскала. Пример. Алгоритм Прима. Пример. Экономические аспекты применения задачи.

Раздел 4. Гамильтоновы циклы (0,5 час.)

Поиск всех гамильтоновых циклов. Алгебраический метод. Алгоритм алгебраического метода. Пример. Экономические аспекты применения задачи. Наикратчайший гамильтонов цикл. Метод ветвей и границ. Алгоритм метода ветвей и границ. Пример. Экономические аспекты применения задачи.

Раздел 5. Паросочетания и покрытия (0,5 час.)

Основные понятия и определения по теме “паросочетания и покрытия”. Паросочетание максимальной мощности. Алгоритм построения чередующегося дерева. Пример. Алгоритм построения паросочетания максимальной мощности. Пример. Обоснование алгоритма построения паросочетания максимальной мощности. Паросочетание максимального веса. Алгоритм Эдмондса – Джонсона. Пример. Построение от паросочетания к покрытию. Построение от покрытия к паросочетанию. Экономические аспекты применения задач.

Раздел 6. Потоки в сетях (0,5 час.)

Основные понятия и определения. Максимальный поток. Алгоритм поиска увеличивающей цепи. Пример. Алгоритм поиска максимального потока. Пример. Экономические аспекты применения задачи. Поток минимальной стоимости. Алгоритм поиска потока минимальной стоимости. Пример. Обоснование алгоритма поиска потока минимальной стоимости. Экономические аспекты применения задачи. Максимально динамический поток. Алгоритм поиска максимально динамического потока. Обоснование алгоритма поиска максимально динамического потока. Экономические аспекты применения задачи. Поток наискорейшего прибытия. Алгоритм поиска потока наискорейшего прибытия. Пример. Обоснование алгоритма поиска потока наискорейшего прибытия. Экономические аспекты применения задачи.

Раздел 7. Центры графов и сетей (0,5 час.)

Главный центр. Абсолютный центр. Главный абсолютный центр. Метод Хакими (нахождение абсолютного центра). Пример. Модифицированный метод Хакими (нахождение абсолютного центра). Пример. Итерационный метод (нахождение абсолютного центра). Пример. Экономические аспекты применения задачи. Главный абсолютный центр. Метод Хакими (нахождение главного абсолютного центра). Пример. Модифицированный метод Хакими (нахождение главного абсолютного центра). Пример. Экономические аспекты применения задачи.

Раздел 8. Изоморфизмы графов ().5 час.)

Основные понятия и определения. Постановка задачи поиска изоморфизма графов. Определение и классификация задач на сопоставление графов. Строгое и нестрогое сопоставление графов. Сопоставление графов с использованием фиктивных вершин. Соответствие графов, разрешающее более одного соответствия для каждой вершины. Сложность сопоставления графов. Строгое соответствие графов: изоморфизм графов. Строгое соответствие подграфов: изоморфизм подграфов. Нестрогое соответствие графов: гомоморфизмы графов и подграфов.

Раздел 9. Социальные и экономические сети (0,5 час.)

История возникновения (работы Jacob Moreno, Anatol Rapoport, William Horvath). Первые графовые модели. Работы Stanley Milgram – эффект «маленького мира». Введение в теорию шести рукопожатий. Работы Barabási Albert-László введение в теорию «Управляемость сложных сетей» («Controllability of Complex Networks»). Результаты эксперимента Mark Granovetter. Предположение о важности слабых связей (weak ties). Применение в торговле товарами и услугами, транспортных, энергетических, городских региональных, международных сетях. Сети ОЭЗ и свободных портов. Результаты Alfred Lotka, закон Лотки (сети цитирования). Всемирная паутина (World Wide Web) - циклическая сеть. Результаты Steven Strogatz и Duncan Watts - феномен тесного мира . Работы Reka Albert и Laszlo Barabasi - распределение вершин по числу связей. Сети предпочтений (Preference networks) - двусторонние информационные сети

Раздел 10. Общие понятия сетей (0,5 час.)

Радиус, эксцентриситет, геодезическая цепь. Диаметр. Диаметр и деревья. Диаметры в случайных графах. Диаметры в мире. Теорема о структуре сети. Распределение степеней. Кластеризация. Модель гомофилии. Динамика и сила слабых связей. Центральность. Возможности измерения центральности: степень – связность, близость и простота достижения других вершин. Маршруты - роль промежуточных вершин и ребер. Влияние. Престиж. Центральность в сети - собственные вектора. Применение мер центральности (Centrality). Диффузия центральности. Случайные Сети. Случайные Сети - пороги и фазовые переходы. Теорема Threshold. Модель маленького мира. Другие статические модели сетей: модели для генерации кластеров, модели для получения другого распределения степеней отличного от распределения Пуассона, модель подгонки данных.

Раздел 11. Модель «маленького мира» (0,5 час.)

Эксперимент Stanley Milgram. Теория шести рукопожатий - модель маленького мира (small world). Модель Duncan Watts и Steve Strogatz с высокой степенью кластеризации и малой средней длинной пути между вершинами. Такие свойства социальной сети, как гомофилия (homophily) и слабые связи (weak ties) позволяют построить множества триад и создают широко разветвленную сеть (возможно достижение множества вершин в несколько этапов). Watts и Strogatz обратили внимание, что сеть имеет множество триад: две соседние вершины имеют общего друга и более того, с высокой вероятностью найдутся пары вершин с короткой длиной пути (short paths connecting) между ними. Модель маленького мира появляется при промежуточных значениях p: высокая кластеризация, соответствующая обычному графу (regular graph)и при этом небольшая длиной пути (path length) между вершинами, как в случайном графе (random graph). Таким образом, чтобы считаться моделью маленького мира сеть должна обладать высокой степенью кластеризации, малым средним геодезическим расстоянием (geodesic distance) относительно всего числа вершин. Одним из примеров такой закономерности является феномен маленького мира (the small – world phenomenon). Основная его идея – социальный мир состоит из коротких связей взаимодействий между социальными объектами.

Раздел 12. Случайные сети (0,5 час.)

Рост случайных сетей. Аппроксимация. Гибридные модели. Формирование гибридных моделей. Блочные модели. Случайные сетевые модели: Эрдеша (Erdos) –Реньи (Renyi), полезно использовать для понимания порогов и особенностей сети, таких как кластеризации и т.д. Другие модели случайных сетей: Watts and Strogatz, Barabasi and Albert, Jackson and Rogers. Они используются для выявления других функций: кластеризации, распределения степеней и др. Стохастические блочные модели: модели дополнения Эрдеша (Erdos) –Реньи (Renyi) для обеспечения вероятности достижения вершины в зависимости от конкретных характеристик вершины (скрытых, в частности). Популярный набор моделей: ERGMs и новые: SERGMs / SUGMs.

Раздел 13. Стратегия формирования сети (0,5 час.)

Стратегия формирования сети. Равновесие и эффективность. Модель соединения сети. Эффективность модели соединения: Попарное равновесие и модель соединений. Внешние эффекты: Формирование сети и трансферы. Неоднородность в стратегии формирования сети. Модель SUGMs и стратегия формирования сети. Равновесие по Нэшу. Динамические стратегии формирования сети. Эволюция и стохастика. Режиссура формирования сети. Применение структурной модели формирования стратегии.

Раздел 14. Диффузия и обучение в сетях. Игры на сетях (0,5 час.)

Диффузия. Bass - модель диффузии. Диффузия на случайных сетях. Главная компонента (Пуассона). SIS – модель. Решение SIS – модели. Решения SIS -модели – примеры. Подготовка данных для модели диффузии. Пример распространения эпидемии. Обучение. Модель ДеГрута (DeGroot). Конвергенция в модели ДеГрута (DeGroot). Примеры игр на сетях. Дополнения и заменители. Свойства равновесий. Несколько равновесий. Применения. Дискретный (бинарный) выбор. Линейные и квадратичные модели. Многошаговые игры на сетях.

Раздел 15. Комбинаторика. Приближенные алгоритмы, NP-полные задачи и трудно решаемые проблемы (0,5 час.)

Комбинаторные объекты. Размещения, перестановки, сочетания, покрытия, разбиения. Эвристики для задачи вершинном покрытии. Приближенные алгоритмы для задачи коммивояжера. Надежные сети минимальной стоимости. Топология прибрежной системы газопроводов. Равномерное разбиения графов. Деревья Штейнера. Временная сложность решения задач дискретной оптимизации. Основные классы сложности (P, NP, NPC). NP–трудные задачи (задача о рюкзаке, задача коммивояжера). Полиномиальные сведения. Теорема Кука. Другие NP-полные задачи: клика и задача коммивояжера, сочетание, покрытие, разбиение.

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА (10 час., в том числе 10 час. с использованием методов активного обучения)

Практические занятия (10/10час.)

Занятие 1. Кратчайшие пути (1 час.)

- Поиск кратчайшего пути между парой заданных вершин. Алгоритм Дейкстры
- Поиск к-кратчайших путей. Алгоритм Двойного поиска

Занятие 2. Остовные деревья в графе (1 час.)

- Поиск всех остовных деревьев
- Поиск наикратчайших остовных деревьев. Алгоритмы Прима, Краскала, Данцинга

Занятие 3. Гамильтоновы циклы (1 час.)

- Поиск всех гамильнотовых циклов. Алгебраический метод
- Поиск наикратчайшего гамильтонова цикла. Метод ветвей и границ

Занятие 4. Паросочетания и покрытия. Задача о китайском почтальоне (1 час.)

- Алгоритм построения чередующегося дерева
- Алгоритм построения паросочетания максимальной мощности
- Паросочетание максимального веса. Алгоритм Эдмондса – Джонсона
- Покрытие минимального веса. Алгоритм Эдмондса – Джонсона
- Задача о китайском почтальоне. Прямо-двойственный алгоритм решения общей задачи

Занятие 5. Потоки в сетях (1 час.)

- Максимальный поток. Алгоритм поиска увеличивающей цепи
- Алгоритм поиска максимального потока
- Алгоритм поиска потока минимальной стоимости
- Максимально динамический поток. Алгоритм поиска максимально динамического потока
- Поток наискорейшего прибытия. Алгоритм поиска потока наискорейшего прибытия

Занятие 6. Центры графов и сетей (1 час.)

- Метод Хакими (нахождение абсолютного центра).
- Модифицированный метод Хакими (нахождение главного абсолютного центра

Занятие 7. Модели Социальные и экономические сети. Модель «маленького мира». Случайные сети (1 час.)

- Модель Duncan Watts и Steve Strogatz с высокой степенью кластеризации и малой средней длинной пути между вершинами
- Модель маленького мира появляется при промежуточных значениях p: высокая кластеризация, соответствующая обычному графу (regular graph) и при этом небольшая длиной пути (path length) между вершинами, как в случайном графе (random graph)
- Рост случайных сетей. Аппроксимация. Гибридные модели. Формирование гибридных моделей
- Блочные модели и Случайные сетевые модели: Эрдеша (Erdos) –Реньи (Renyi)
- Другие модели случайных сетей: Watts and Strogatz, Barabasi and Albert, Jackson and Rogers
- Стохастические блочные модели: модели дополнения Эрдеша (Erdos) –Реньи (Renyi) для обеспечения вероятности достижения вершины в зависимости от конкретных характеристик вершины (скрытых, в частности).
- Популярный набор моделей: ERGMs и новые: SERGMs / SUGMs.

Занятие 8. Стратегия формирования сети (1 час.)

- Стратегия формирования сети. Равновесие и эффективность. Модель соединения сети. Эффективность модели соединения: Попарное равновесие и модель соединений.
- Неоднородность в стратегии формирования сети. Модель SUGMs и стратегия формирования сети.
- Динамические стратегии формирования сети. Эволюция и стохастика. Режиссура формирования сети. Применение структурной модели формирования стратегии
- Диффузия. Bass - модель диффузии. Диффузия на случайных сетях.

- Главная компонента (Пуассона). SIS – модель. Решение SIS – модели

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика» представлено в приложении 1, и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Абрамов, А.Л. Экстремальные задачи на сетях и графах / А.Л.Абрамов. – Владивосток: Издательский дом Дальневост. федераль. ун-та, 2022 - 332 с.
2. Абрамов, А.Л. Модели сложных сетей / А.Л.Абрамов. – Владивосток: Издательский дом Дальневост. федераль. ун-та, 2022 - 136 с.
3. Карпов, Д. В. Теория графов / Д.В.Карпов – Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2017 – 564 с. https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf (дата обращения 17.09.2022)
4. Кирсанов, М.Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы / М.Н. Кирсанов. — М.: Физматлит, 2006. — 168с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2738
5. Бабичева, И.В. Дискретная математика. Контролирующие материалы к тестированию / И.В. Бабичева. — СПб.: Лань, 2013. — 160с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=30193
6. Шевелев, Ю.П. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группах) / Ю.П. Шевелев, Писаренко Л. А., Шевелев М.Ю. — СПб.: Лань, 2013. — 524с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=5251
7. Мальцев, И.А. Дискретная математика / И.А. Мальцев. — СПб.: Лань, 2011. — 304с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=638
8. Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. — СПб.: Лань, 2009. — 396с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=220
9. Шевелев, Ю.П. Дискретная математика / Ю.П. Шевелев. — СПб.: Лань, 2008. — 592с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=437

10. Есипов, Б.А. Методы исследования операций / Б.А. Есипов. — СПб.: Лань, 2013. — 300с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=10250

11. Newman M. E. J. Networks: An Introduction [Книга]. - University of Michigan and Santa Fe Institute: Oxford Press, 2010. – 790 с.

12. Jackson M. O. Social and economic networks [Книга]. - Princeton : Princeton University Press, 2008. – 648 с.

13. D. J. Wattы and S. H. Stogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ network. Nature, 393(6684): 440-442(1998)Albert-László Barabási & Réka Albert (October 1999). «Emergence of scaling in random networks». Science 286 (5439): 509–512. DOI:10.1126/science.286.5439.509.

14. Ozik, J., Hunt, B. R. & Ott, E. *Growing networks with geographical attachment preference: Emergence of small worlds*. Phys. Rev. E**69**, 026108 (2004).

15. Aoyuan Peng, Lianming Zhang. Deterministic multidimensional growth model for small-world networks. CoRR abs/1108.5450 (2011)

16. Yilun Shang. Geometric Assortative Growth Model for Small-World Networks // http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3919055/

Дополнительная литература

1. Микони С.В. Дискретная математика: множества, отношения, функции, графы / С.В. Микони. — СПб.: Лань, 2012. — 187с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4316

2. Гаврилов, Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. — М.: Физматлит, 2009. — 420с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2157

3. Редькин, Н.П. Дискретная математика / Н.П. Редькин. — М.: Физматлит, 2009. — 263с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2293

4. Певзнер, Л.Д. Практикум по математическим основам теории систем / Л.Д. Певзнер. — СПб.: Лань, 2013. — 400с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=10254

5. Копылов В.И. Курс дискретной математики / В.И. Копылов. — СПб.: Лань, 2011. — 207с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=1798

6. Иванов, Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Полный курс / Б.Н. Иванов. — М.: Физматлит, 2007. — 406с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59461

7. Ландо, С.К. Введение в дискретную математику / С.К. Ландо. — М. : МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2012. — 264с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=56405

8. Макоха, А.Н. Дискретная математика / А.Н. Макоха, П.А. Сахнюк, Н.И. Червяков. — М.: Физматлит, 2005. — 368с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2256

9. Ржевский, С.В. Исследование операций / С.В. Ржевский. — СПб.: Лань, 2013. — 476с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=32821
10. Горлач, Б.А. Исследование операций / Б.А. Горлач. — СПб.: Лань, 2013. — 442с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4865

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронно-библиотечная система - http://e.lanbook.com/;
2. Студенческая электронная библиотека - http://www.studentlibrary.ru/;
3. Электронно-библиотечная система - http://znanium.com/;
4. Электронная библиотека - http://www.nelbook.ru/;
5. База данных Scopus http://www.scopus.com/home.url;
6. База данных Web of Science http://apps.webofknowledge.com/;
7. База данных полнотекстовых академических журналов Китая http://oversea.cnki.net/;
8. Электронная библиотека диссертаций Российской государственной библиотеки http://diss.rsl.ru/;
9. Электронные базы данных EBSCO http://search.ebscohost.com/;

Перечень информационных технологий и программного обеспечения

№ п/п	Место расположения компьютерной техники, на которой установлено программное обеспечение, количество рабочих мест	Перечень программного обеспечения
1.	690922, Приморский край, г. Владивосток, остров Русский, полуостров Саперный, поселок Аякс, 10, корпус D, ауд. D733а. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации: компьютерный класс	Microsoft Office - лицензия Standard Enrollment № 62820593. Дата окончания 2020-06-30. Родительская программа Campus 3 49231495. Торговый посредник: JSC "Softline Trade" Номер заказа торгового посредника: Tr000270647-18.
2.	690922, Приморский край, г. Владивосток, остров Русский, полуостров Саперный, поселок Аякс, 10, корпус D, ауд. D732. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.	Photoshop CC for teams All Apps ALL Multiple Platforms Multi European Languages Team Licensing Subscribtion Renewal №ЭА-667-17 от 08.02.2018. 07,

V. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

В процессе изучения дисциплины «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика» предлагаются разнообразные методы и средства освоения учебного материала: лекции, лабораторные работы, коллоквиумы, тестирование, самостоятельная работа аспирантов.

Лекции

Лекция – основная активная форма аудиторных занятий, необходимая для разъяснения основополагающих теоретических разделов. Предполагает интенсивную умственную деятельность аспиранта. Лекция носит познавательный, развивающий, воспитательный и организующий характер. Конспект лекций помогает усвоить теоретический материал дисциплины. При слушании лекции надо конспектировать ее рубрикацию, терминологию, ключевые слова, определения, формулы, графические схемы. Конспект является полезным, когда он пишется самим аспирантом. Можно разработать собственную схему сокращения слов. Название тем, параграфов можно выделять цветными маркерами.

При домашней работе с конспектом лекций необходимо использовать основной учебник и дополнительную литературу, которые рекомендованы по данной дисциплине. Именно такая серьезная работа аспиранта с лекционным материалом позволяет достичь ему успехов в овладении новыми знаниями.

При изложении лекционного курса по дисциплине «Социально-экономические и информационные сети: модели и методы анализа» в качестве форм интерактивного обучения используются: лекция-беседа, лекция-визуализация, лекция пресс-консультация, которые строятся на базе предшествующих знаний и знаний смежных дисциплин. Для иллюстрации словесной информации применяются презентации, интерактивная доска, таблицы, схемы. По ходу изложения лекционного материала ставятся проблемные и провоцирующие вопросы, включаются элементы дискуссии.

Лекция-визуализация. Чтение лекции сопровождается компьютерной презентацией с базовыми текстами (заголовки, формулировки, ключевые слова и термины), иллюстрациями микроскопических и ультрамикроскопических изображений клеток и тканей, рисованием схем и написанием формул на интерактивной доске, производится демонстрация наглядных таблиц и слайдов, что способствует лучшему восприятию излагаемого материала. Лекция - визуализации требует определенных навыков: словесное изложение материала должно сопровождаться и сочетаться с визуальной формой. Информация, изложенная в виде схем, таблиц, слайдов, позволяет формировать проблемные вопросы и способствует развитию профессионального мышления будущих специалистов.

Лекция-беседа – «диалог с аудиторией» – является распространенной формой интерактивного обучения и позволяет непосредственно вовлекать аспирантов в учебный процесс, так как создает прямой контакт преподавателя с аудиторией. Такой контакт достигается по ходу лекции, когда аспирантам задаются вопросы проблемного, провоцирующего или информационного характера или когда аспирантам самим предлагается задавать вопросы. Вопросы предлагаются всей аудитории, и любой из аспирантов может предложить свой ответ, другой может его дополнить. При этом от лекции к лекции выявляются активные и пассивные аспиранты, преподаватель по возможности активизирует аспирантов, которые не участвуют в работе. Такая форма лекции позволяет вовлечь всех аспирантов в работу, активизировать их внимание, мышление, получить коллективный опыт, научиться формировать вопросы. Преимущество лекции-беседы состоит в том, что она позволяет привлекать внимание аспирантов к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала.

Лекция-консультация. Преподаватель делает краткое (тезисное) сообщение. Аспиранты задают вопросы, на которые отвечают преподаватель и другие аспиранты. На основе вопросов и ответов развертывается творческая дискуссия.

Практические занятия

Лабораторные работы. Лабораторные работы повышают качество обучения, способствуют развитию познавательной активности у аспирантов, их логического мышления и творческой самостоятельности. В процессе выполнения лабораторных работ углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается умение применять их на практике. Аспирант учится правильно использовать методы, видеть их достоинства и недостатки, получает неоценимый опыт по использованию данных методов. Все это позволяет глубже понять теоретические Социально-экономические и информационные сети: модели и методы анализа. Формируются навыки научно-исследовательской работы и профессиональные компетенции.

Коллоквиумы. Коллоквиум – коллективная форма рассмотрения и закрепления учебного материала. Коллоквиумы являются одним из видов практических занятий, предназначенных для углубленного изучения дисциплины, проводятся в интерактивном режиме. На занятиях по теме коллоквиума разбираются вопросы, и затем вместе с преподавателем проводится их обсуждение, которое направлено на закрепление материала, формирование навыков вести полемику, развитие самостоятельности и критичности мышления, на способность аспирантов ориентироваться в больших информационных потоках, вырабатывать и отстаивать собственную позицию по проблемным вопросам учебной дисциплины.

В качестве методов интерактивного обучения на коллоквиумах используются: развернутая беседа, диспут, пресс-конференция.

Развернутая беседа предполагает подготовку аспирантов по каждому вопросу плана занятия с единым для всех перечнем рекомендуемой обязательной и дополнительной литературы. Доклады готовятся аспирантами по заранее предложенной тематике.

Диспут в группе имеет ряд достоинств. Диспут может быть вызван преподавателем в ходе занятия или же заранее планируется им. В ходе полемики аспиранты формируют у себя находчивость, быстроту мыслительной реакции.

Пресс-конференция. Преподаватель поручает нескольким аспирантам подготовить краткие (тезисные) сообщения. После докладов аспиранты задают вопросы, на которые отвечают докладчики и другие члены экспертной группы. На основе вопросов и ответов развертывается творческая дискуссия вместе с преподавателем.

Контрольные тесты. Используется бланковое или компьютерное тестирование в режиме выбора правильных ответов, установления соответствия понятий, обозначения деталей на схемах и прочее.

Возможны также письменные контрольные работы в форме традиционных письменных ответов на ряд вопросов по пройденной теме, изложенной в лекциях и обсужденной на коллоквиумах. Несмотря на произвольность формы, в ответах обязательно использование терминов, ключевых слов и понятий, а при необходимости схем и формул. По некоторым темам предлагается решение задач.

Методические указания по работе с литературой

Надо составить первоначальный список источников. Основой может стать список литературы, рекомендованный в рабочей программе курса. Для удобства работы можно составить собственную картотеку отобранных источников (фамилия авторов, заглавие, характеристики издания) в виде рабочего файла в компьютере. Такая картотека имеет преимущество, т.к. она позволяет добавлять источники, заменять по необходимости одни на другие, Первоначальный список литературы можно дополнить, используя электронный каталог библиотеки ДВФУ, при этом не стесняйтесь обращаться за помощью к сотрудникам библиотеки.

Работая с литературой по той или другой теме, надо не только прочитать, но и усвоить метод ее изучения: сделать краткий конспект, алгоритм, схему прочитанного материла, что позволяет быстрее его понять, запомнить. Не рекомендуется дословно переписывать текст.

Методические рекомендации к самостоятельной работе аспиранта

Текущий контроль результатов самостоятельной работы осуществляется в ходе проведения лабораторных работ (устный опрос), коллоквиумов и тестирования. На основании этих результатов аспирант получает текущие и зачетные оценки, по которым выводится итоговая оценка. Промежуточная (семестровая) аттестация проводится в форме устного зачета.

Методические указания по подготовке к лабораторным работам и их выполнению

К лабораторным работам аспирант должен подготовиться: повторить лекционный материал, прочитать нужный раздел по теме в учебнике.

Занятие начинается с краткого устного опроса по заданной теме. Далее аспиранты работают с конкретными методами.

Для занятий необходимо иметь халат и сменную обувь. Необходимо освоить технику безопасности при работе со всеми используемыми на занятии методами, правильно оценить, сколько необходимо реактивов и расходных материалов для работы. Только после этого аспирант может начинать непосредственно работать с поставленной задачей. В конце занятия аспирант предоставляет преподавателю отчет по результатам проделанной работы с выводами.

Ответы на вопросы, выступления и активность аспирантов на занятии оцениваются текущей оценкой.

Методические указания по подготовке к коллоквиумам

Поскольку коллоквиум является коллективной формой рассмотрения и закрепления учебного материала, к нему должны готовиться все аспиранты. Коллоквиум обычно проводится в форме развернутой беседы, диспута, пресс-конференции. На каждый коллоквиум заранее объявляется тема и перечень вопросов для устных сообщений. По всем вопросам надо проработать соответствующий материал из учебника, конспекта лекций, дополнительной литературы и соответствующей лабораторной работы. Преподаватель объявляет вопрос и предлагает сделать сообщение на 5-7 минут одному из аспирантов – либо по их желанию, либо по своему выбору. После сообщения преподаватель и аспиранты задают вопросы и выступают с дополнениями и комментариями.

Ответы на вопросы, выступления и активность аспирантов на занятии оцениваются текущей оценкой.

Методические указания по подготовке доклада

По отдельным темам на коллоквиумах могут делаться более емкие и глубокие доклады – до 15-20 минут. Тема доклада может быть предложена преподавателем или выбрана аспирантом самостоятельно.

При подготовке к докладу проводится подбор литературных источников по теме из рекомендуемой основной и дополнительной литературы, а также работа с ресурсами информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», указанными в рабочей программе.

Работа с текстом научных книг и учебников состоит не только в прочтении материала, необходимо провести анализ, сравнить изложение материала в разных источниках, подобрать материал таким образом, чтобы он раскрывал тему доклада. Проанализированный материал конспектируют, при этом надо избегать простого переписывания текстов без каких либо комментариев и анализа. Прямое заимствование текстов других авторов в науке не допускается, оно определяется как плагиат и является наказуемым. Цитирование небольших фрагментов (со ссылкой на автора) допускается, если надо подчеркнуть стиль или сущность авторского определения, но злоупотреблять чужими текстами нельзя. Доклад должен быть выстроен логично, материал излагается цельно, связно и последовательно, делаются выводы. Желательно, чтобы аспирант мог выразить своё мнение по обсуждаемой проблеме. Необходимо заранее продумать схемы для иллюстрации на доске или приготовить их в форме компьютерной презентации. В докладе обязательно необходимо использовать термины и ключевые слова по данной теме. После доклада проводится обсуждение с дополнениями и поправками. Оценивается как качество доклада, так и активность участников дискуссии.

VI. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

№ п\п	Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы
1.	690922, Приморский край, г. Владивосток, остров Русский, полуостров Саперный, поселок Аякс, 10, корпус D, ауд. D733а. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации: компьютерный класс	Компьютер (твердотельный диск - объемом 128 ГБ; жесткий диск - объем 1000 ГБ; форм-фактор - Tower; комплектуется клавиатурой, мышью, монитором AOC i2757Fm; комплектом шнуров эл. питания) модель - M93p1 - 13 шт
2.	690922, Приморский край, г. Владивосток, остров Русский, полуостров Саперный, поселок Аякс, 10, корпус D, ауд. D732. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций,	Мультимедийное оборудование: Экран проекционный Projecta Elpro Large Electron, 300x173 см, размер рабочей области 290x163– 1 шт; Документ-камера Avervision CP 355 AF– 1 шт; Мультимедийный проектор, Mitsubishi FD630U, 4000 ANSI Lumen, 1920x1080– 1 шт; Сетевая видеокамера Multipix MP-HD718– 1 шт; ЖК-панель 47", Full HD, LG M4716 CCBA– 1 шт;

	текущего контроля и промежуточной аттестации.	ЖК-панель 42", Full HD, LG M4214 CCBA– 1 шт; ЖК-панель 42", Full HD, LG M4214 CCBA– 1 шт;

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ
по дисциплине «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика»

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	2-6 недели	- Введение в теорию графов, гиперграфов и комбинаторику - Кратчайшие пути - Поиск деревьев и остовных деревьев в графе	10 часов	**Отчет, презентация, защита.** **Структура отчета по задачам:** - Содержательная постановка задачи. - Формальная постановка задачи. - Алгоритм решения задачи, демонстрируемый на примере. -Обоснование алгоритма (теоремы, теоретические оценки). Этот отчет предъявляется преподавателю и защищается в устной форме перед ним.
2	8-10 недели	Гамильтоновы циклы Паросочетания и покрытия Потоки в сетях Центры графов и сетей Изоморфизмы графов	14 часов	**Отчет, презентация, защита.** **Структура отчета по задачам:** - Содержательная постановка задачи. - Формальная постановка задачи. - Алгоритм решения задачи, демонстрируемый на примере. -Обоснование алгоритма (теоремы, теоретические оценки). Этот отчет предъявляется преподавателю и защищается в устной форме перед ним.
3	11-13 недели	Социальные и экономические сети Общие понятия сетей Модель «маленького мира» Стратегия формирования сети	14 часов	**Отчет, презентация, защита.** **Структура отчета по задачам:** - Содержательная постановка задачи. - Формальная постановка задачи. - Алгоритм решения задачи, демонстрируемый на примере. -Обоснование алгоритма (теоремы, теоретические оценки).

				Этот отчет предъявляется преподавателю и защищается в устной форме перед ним.
4	11-17 недели	**- Диффузия и обучение в сетях. Игры на сетях** - Диффузия. Bass - модель диффузии. Диффузия на случайных сетях. Главная компонента (Пуассона). - SIS – модель - Пример распространения эпидемии. - Обучение. Модель ДеГрута (DeGroot) - Примеры игр на сетях. - Свойства равновесий. Несколько равновесий - Линейные и квадратичные модели - Многошаговые игры на сетях	10 часов	**Отчет, презентация, защита.** **Структура отчета по задачам:** - Содержательная постановка задачи. - Формальная постановка задачи. - Алгоритм решения задачи, демонстрируемый на примере. -Обоснование алгоритма (теоремы, теоретические оценки). Этот отчет предъявляется преподавателю и защищается в устной форме перед ним.
5	15-17 недели	- Комбинаторика. Приближенные алгоритмы, NP-полные задачи и трудно решаемые проблемы	6 часов	**Отчет, презентация, защита.** **Структура отчета по задачам:** - Содержательная постановка задачи. - Формальная постановка задачи. - Алгоритм решения задачи, демонстрируемый на примере. -Обоснование алгоритма (теоремы, теоретические оценки). Этот отчет предъявляется преподавателю и защищается в устной форме перед ним.
Всего		54 часа		

Методические указания
к дисциплине
«Теория графов, гиперграфов и комбинаторика»

Занятие 1. Введение в теорию графов, гиперграфов и комбинаторику [1,2,3]

Граф можно представить в виде некоторой геометрической фигуры, состоящей из точек (вершин) и отрезков (ребер) [45].

Если указаны начало и конец ребра, то граф – ориентированный, если не указаны, то граф – неориентированный.

Ребра называются смежными (инцидентными), если они имеют одну общую вершину [42].

Маршрут – это чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся в вершине (чередующаяся последовательность вершин и ребер).

Цепь – это последовательность попарно различных ребер, соединяющая различные вершины (в ориентированном графе цепь называется путем).

Замкнутый маршрут – это чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся в вершине, в котором начальная и конечная вершины совпадают.

Цикл – это последовательность попарно чередующихся ребер, начинающаяся и заканчивающаяся в одной вершине (ребра должны быть попарно различными). В простом цикле попарно различными должны быть не только ребра, но и вершины [45].

Эйлеров цикл – это цикл, который проходит через все ребра графа один раз.

Гамильтонов цикл – это простой цикл, который проходит через каждую вершину графа один раз.

Связный граф – это граф, в котором каждая пара вершин может быть соединена простой цепью (определение простой цепи аналогично определению простого пути).

Дерево – это связный граф без циклов [39]. Существуют не менее 7-и эквивалентных определений дерева.

Каркас или остов – это дерево, имеющее то же количество вершин, что и исходный граф, а множество ребер данного дерева является подмножеством ребер исходного графа.

Степень вершины – это число инцидентных ей ребер.

Паросочетание – множество ребер такое, что каждой вершине графа инцидентно не более чем одно ребро этого множества [34].

Покрытие – некоторое множество ребер в графе такое, что каждая вершина графа инцидентна по крайней мере одному ребру этого множества.

Раздел 2. Кратчайшие пути [1,2,3]

Каждой дуге (x, y) исходного ориентированного графа G поставим в соответствие число $c(x, y)$. Если в графе G отсутствует дуга (x, y), то $c(x, y) = 0$. Назовем число $c(x, y)$ весом/длиной дуги (x, y). Определим длину пути (маршрута/цепи) как сумму длин отдельных дуг (ребер), составляющих этот путь (цепь).

Для любых двух вершин s и t графа G может существовать несколько путей, соединяющих вершину s с вершиной t.

Рассмотрим алгоритм, который определяет такой путь, ведущий из вершины s в вершину t, и имеющий минимальную возможную длину. Этот путь называется кратчайшим путем между вершинами s и t.

Содержательная постановка задачи (одна из классических содержательных постановок). Найти кратчайший путь, ведущий из пункта А в пункт Б и проходящий через множество населенных пунктов и перекрестков, если длины дорог (стоимости проездов) между каждой парой перекрестков и населенных пунктов известны.

Формальная постановка задачи. Пусть дан связный неориентированный взвешенный без петель граф G. Задача о поиске наикратчайшей цепи состоит в том, чтобы найти подграф $\boldsymbol{G_{st}}$, включающий наикратчайшие цепи от заданной вершины V_s до V_t, при этом сумма весов ребер минимальна [36]. Данная постановка задачи формально описывается следующим образом:

$$\phi: G = (V, A) \rightarrow \left[G_{st} = (V_{st}, A_{st}) | V_s, V_t \subset V, \sum_{\substack{l \in V_{st} \\ l \in \{1,2,\dots,m\}}}^{\sum} c_l^{st} \rightarrow min\, [] \right] \quad (1)$$

Существует и другая формальная постановка задачи. Пусть дан связный неориентированный взвешенный без петель граф G. Задача о поиске наикратчайшей цепи состоит в том, чтобы найти подграф G_s, являющийся деревом кратчайших цепей, т.е. включающем кратчайшие цепи из V_s во все вершины графа (т.е. в каждую из вершин) [44]. Данная постановка задачи формально описывается следующим образом:

$\phi: G = (V, A) \to [G_s = (Vs, A_s) | G_s - \textit{дерево кратчайших цепей}]$ (2)

Замечание. Для решения этих задач в случае, если веса ребер неотрицательны, и в графе отсутствуют циклы отрицательного веса, используется эффективный алгоритм, который носит название: алгоритм Дейкстры (волновой алгоритм).

Раздел 3. Остовные деревья в графе (0,5 час.)

При решении ряда задач возникает необходимость в построении полного списка остовных деревьев графа G. Например, в том случае, когда надо отобрать наилучшее по определённым параметрам дерево, а критерий, позволяющий осуществить такой отбор, является сложным, так что непосредственное решение задачи оптимизации (не использующей перечисление всех остовных деревьев) оказывается невыполнимым [28].

Формальная постановка задачи. Пусть дан связный граф G. Построить для него все остовные деревья с помощью отображения φ:

$\phi: G = (V, A) \to \{G_p = (V, A_p) | A_p \subseteq A, G_p - \textit{дерево}, p = |\beta_0 \cdot \beta_0^T|\}$, где β_0 - матрица инциденций исходного графа G с одной удаленной строкой (на основе теоремы Кирхгоффа).

Содержательная постановка. Проблема построения наикратчайшего остовного дерева возникает в значительном количестве практических задач. Например, предположим, что существует компания, которая является поставщиком природного газа, занимающаяся его поставками из места разработки К заказчикам. Тогда наикратчайший остов сети подачи газа определяет такую распределительную систему, которая свяжет всех заказчиков и при этом затраты (или расстояния) будут минимальными. Аналогичная задача возникает также при проектировании транспортной сети, когда требуется найти решения, минимизирующие затраты. Существуют и другие примеры.

Формальная постановка задачи. Остовным деревом называется связный граф без циклов, состоящий из n-1 ребра и n вершин. Взвешенным графом является граф каждому ребру (дуге) которого приписано число (функция), называемая весом (расстоянием).

Пусть дан связный взвешенный без петель граф, необходимо найти отображение данного графа в подграф, являющийся наикратчайшим остовным деревом, т.е. таким остовным деревом сумма весов ребер (дуг) которого минимальна:

$\phi: G = (V, A) \to \{G_p = (V, A_p) | A_p \subseteq A, G_p - \textit{дерево}\ \}$, где сумма весов ребер в G_p минимальна$\}$.

Замечание. Такую задачу можно решать с помощью алгоритма Краскала (Крускала) или алгоритма Прима.

Раздел 4. Гамильтоновы циклы (0,5 час.)

Формальная постановка задачи. Пусть дан связный граф G, необходимо выделить в нем подграфы, содержащие все гамильтоновы циклы:

$$\phi: G = (V, A) \to \left[G_\phi = (V, A_\phi) | (V_0, V_1, \ldots, V_{n+1}): \forall V_i \in V \text{появляется в } (V_0, V_1, \ldots, V_{n+1}) \text{ ровно один раз}\right]$$

Замечание 1. Этот метод включает в себя построение всех простых цепей с помощью последовательного перемножения модифицированных матриц смежности.

Введем некоторые определения.

1) Внутреннее произведение вершин цепи $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}, V_k$ определяется как выражение вида $V_2 * V_3 * \ldots * V_{k-1}$ [2].
2) Модифицированная матрица смежности $B = \{\beta_{ij}\}$ - это $(n \times n)$ матрица, в которой $\beta_{ij} = \begin{cases} V_j, \textit{если} \exists \text{дуга}(V_i, V_j) \\ 0, \textit{впротивномслучае} \end{cases}$.

3) Предположим, что существует матрица $P_l = \{p_l(i,j)\}$, где $p_l(i,j)$ - сумма внутренних произведений всех простых цепей длины $l (l \geq 1)$ между вершинами V_i и V_j, причем $V_i \neq V_j$, если имеется знак равенства, то $p_l(i,j) = 0, \forall i$.

Алгоритм

1. **Основной шаг** алгебраического метода состоит в процедуре умножения матриц

$B * P_l = P_{l+1}{}' = \{p_{l+1}{}'(s,t)\}$, где

$$p_{l+1}{}'(s,t) = \sum_k \beta(s,k) * p_l(k,t) \quad (1)$$

т.е. $p_{l+1}{}'(s,t)$ является суммой внутренних произведений всех цепей, ведущих из вершины V_s в вершину V_t, длины которых $l+1$.

2. **Превращение всех цепей в простые цепи**. Т.к. все цепи из V_s в V_t, представленные внутренними произведениями $p_l(k,t)$, являются простыми, то среди цепей, получающихся из формулы (1), не являются простыми лишь те, внутренние произведения которых в $p_l(k,t)$ содержат вершину V_s.

Таким образом, если из $p_{l+1}{}'(s,t)$ исключить слагаемые, содержащие V_s, то тогда мы получаем $p_{l+1}(s,t)$ и матрицу, составленную из этих элементов $P_{l+1} = \{p_{l+1}(s,t)\}$, в ней обнуляем диагональные элементы и получаем матрицу всех простых цепей длины $l+1$ [26].

3. **Повторение основного шага.** Вычисляя $B * P_{l+1}$, находим P_{l+2} и т.д., продолжаем этот процесс пока не будет построена матрица P_{n-1}, дающая все гамильтоновы цепи длины $n-1$ между всеми парами вершин в G.

4. **Гамильтоновы циклы получаются** сразу из цепей в P_{n-1} и тех дуг из графа G, которые соединяют начальную и конечную вершины каждой гамильтоновой цепи.

Комментарий 1. Гамильтоновы циклы могут быть получены через внутренние произведения вершин, стоящих в каждой диагональной ячейке произведения матриц $B * P_{n-1}$ (все диагональные элементы этой матрицы равны). Т.е. необходимо знать только элемент $p_n{}'(1,1)$. На данном этапе достаточно использовать только первый столбец из P_l.

Примечание 1: В общем случае исходный граф является смешанным. Поэтому должны выполняться все шаги алгоритма.

Примечание 2: В качестве начального значения матрицы P , т.е. P_1, следует взять матрицу смежности A исходного графа, положив ее диагональные элементы равными нулю.

Формальная постановка задачи. Пусть дан связный взвешенный граф G, необходимо выделить в нем подграф, содержащий гамильтонов цикл, сумма весов ребер в котором минимальна:

$$\phi: G = (V,A) \rightarrow \begin{bmatrix} G_\phi = (V, A_\phi) | (V_0, V_1, \dots, V_{n+1}) : \forall V_i \in V \textit{появляетсяв} (V_0, V_1, \dots, V_{n+1}) \textit{одинраз} \wedge \\ \sum_{(i,j)}^{\sum j (V_0, V_1, \dots, V_{n+1})_{0_{n+1}}} c(V_i, V_j) \rightarrow min \end{bmatrix}$$

Замечание 1. Задача поиска наикратчайшего гамильтонова цикла известна в дисциплине «Исследования операций» как задача коммивояжера (задача о поиске маршрута бродячего торговца).

Замечание 2. Существует развитfя теория решения подобных задач. Так как задача NP-полна, то алгоритмы ее решения делятся на 2-а больших класса: точные и приближенные.

Замечание 3. Один из методов точного решения задачи построения наикратчайшего гамильтонова цикла – метод ветвей и границ [3].

Раздел 5. Паросочетания и покрытия (0,5 час.)

Существует целый комплекс классических задач теории графов, называемых задачами о паросочетаниях и покрытиях, которые находят применение в целеполагании, прогнозировании, планировании и программировании социально-экономического функционирования и развития на уровне региона, города, крупного, среднего и малого бизнеса, домашних хозяйств. Приведем некоторые содержательные примеры подобных задач.

1. **В последнее время (если не считать период пандемии) в летный состав** различных национальных авиакомпаний разрешено включать летчиков из других стран, что вызывает дефицит летчиков в тех странах, где условия привлечения летного состава менее конкурентны. Для выполнения полетов требуются экипажи, в которых умение пилотировать сочетается со знанием языка и психологической совместимостью.

Графовая модель. Для решения такой задачи построим формальную графовую модель, каждая вершина которой соответствует пилоту. Ребрами соединяются вершины, если пилоты, которым они соответствуют в модели, могут летать вместе. Тогда любое паросочетание в этом графе представляет собой допустимое множество бортов, которые могут находиться в воздухе одновременно.

Таким образом, **задача авиакомпании состоит в том**, чтобы обеспечить нахождение наибольшего числа самолетов в воздухе на маршрутах одновременно. С точки зрения графовой модели необходимо найти такое паросочетание в графе, которое содержит наибольшее число ребер, т.е. паросочетание максимальной мощности.

2. **Агентство по продаже недвижимости** во Владивостоке имеет для реализации ряд квартир и некоторое количество потенциальных покупателей. Каждый такой покупатель может проявлять интерес к более чем одной из квартир. Агентство может достаточно точно оценить сколько каждый покупатель заплатит за каждую из представляющих для него интерес квартир.

Агентство получает от 3-10% комиссионных отчислений от каждой сделки, поэтому оно заинтересовано в максимизации объемов продаж. Каким образом можно достигнуть такого максимума?

Графовая модель. Поставим в соответствие каждому покупателю и каждой квартире вершины графа. Дугами соединяются вершины в том случае, когда покупатель выражает желание купить конкретную квартиру. Тогда дуга представляет возможную сделку. Присвоим каждой дуге графа вес, равный размеру комиссионных отчислений, которые агентство может получить от реализации сделки.

Задача заключается в максимизации прибыли агентством при заключении сделок, т.е. необходимо заключить такое количество сделок и с таким весом, чтобы в сумме их сумма была максимальной. С точки зрения графовой модели необходимо найти такой подграф в графе, который содержал бы паросочетание с максимальным весом.

3. **Во Владивостоке необходимо создать муниципальную службу** по работе с ТОС микрорайонов (с привязкой к границам избирательных округов). Она должна быть сформирована таким образом, чтобы в нее входили по крайней мере по одному представителю от каждого из 17 избирательных округов (рис. 18) и по крайней мере по одному представителю из каждого из 230 имеющихся в городе ТОС. Пожелали принять участие в муниципальной службе 470 чел. Необходимо определить состав службы, включающей наименьшее число претендентов и удовлетворяющего всем вышеперечисленным требованиям.

Графовая модель. Построим граф, в котором каждый из избирательных округов представляется вершиной и каждое ТОС также представляется вершиной. Таким образом, граф будет иметь 247 вершин. Пусть каждый человек, пожелавший участвовать в работе муниципальной службы, представляется дугой графа, соединяющей вершины, соответствующие избирательному округу, в котором он проживает, и ТОС, к которому он принадлежит. Любая служба, удовлетворяющая всем требования распределения по округам и *т*ерриториальным общественным самоуправлениям, соответствует покрытию данного графа. Служба с наименьшим количеством членов соответствует покрытию графа с наименьшим количеством дуг, т.е. покрытию минимальной мощности.

4. **Служба трудоустройства** создает возможность встречи каждого обратившегося (клиента) по крайней мере с одним подходящим для него работодателем. Размер затрат службы на каждую встречу различен в зависимости от конкретных мероприятий, требуемых для ее организации (время и место, система предпочтений встречающихся и др.).

Каким образом служба может с минимальными издержками выполнить все обязательства перед клиентами?

Графовая модель. Построим граф, в котором каждой вершине соответствует клиент и работодатель, а каждой совместимой паре (клиент – работодатель) - дуга. Каждой дуге припишем вес, равный издержкам (или платежу) за соответствующую встречу.

Любое покрытие этого графа представляет собой способ организации по крайней мере одной подходящей встречи с работодателем для каждого клиента службы трудоустройства.

Служба должна найти покрытие графа с наименьшими общими издержками (общие издержки равны сумме издержек на каждую из встреч), т.е. покрытие с минимальным весом.

Типы задач о паросочетания и покрытиях. В приведенных выше содержательных примерах проиллюстрированы основные типы задач о паросочетаниях и покрытиях: паросочетание максимальной мощности (ПС ММ), паросочетание максимального веса (ПС МВ), покрытие минимальной мощности (П ММ), покрытие минимального веса (П МВ). Запишем теперь формальные постановки для этих задач.

Формальная постановка задачи ПС ММ. Пусть дан связный неориентированный граф G *=(V,A)*, необходимо выделить в нем подграф, содержащий паросочетание максимальной мощности:

$$\phi: G = (V, A) \to \left[G_\phi = (V, A_\phi) \middle| \, A_\phi \subseteq A \wedge \forall A_i, A_j \in A_\phi \wedge i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \wedge |A_\phi| \to max \right]$$

Замечание 1. Если в задаче о ПС ММ граф G *=(V,A)* является двух дольным, то она может быть решена путем сведения к задаче о максимальном потоке в сети с использованием, например, алгоритма Форда-Фалкерсона или методов целочисленного линейного программирования. Если же граф не является двух дольным, то необходимы специальные алгоритмы решения, речь о которых пойдет ниже.

Формальная постановка задачи ПС МВ. Пусть дан связный неориентированный взвешенный граф G *=(V,A)*, необходимо выделить в нем подграф, содержащий паросочетание максимального веса, т.е. подграф сумма весов ребер в котором максимальна:

$$\phi: G = (V, A) \to \begin{bmatrix} G_\phi = (V, A_\phi) | A_\phi \subseteq A \wedge \forall A_i, A_j \in A_\phi \wedge i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \wedge \\ \sum_{A_j \in A} c(A_j) \to max \end{bmatrix}$$

Формальная постановка задачи. Пусть имеет место граф G = (X,E). Пусть $V=\{V_1, V_2, \ldots, V_z\}$ – множество всех подмножеств множества X, состоящих из нечетного числа элементов. Пусть через $2n_m+1$ обозначено число вершин в подмножестве V_m, а через U_m – множество таких ребер, что хотя бы одна из инцидентных им вершин принадлежит X_m.

Справедливо следующее утверждение: каждое покрытие должно содержать в U_m по крайней мере (n_m+1) ребер.

Пусть a(i,j) – вес ребра (i,j). Пусть x(i,j)=1, если ребро (i,j) принадлежит покрытию; в противном случае x(i,j) = 0.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{(i,j)} a(i,j)x(i,j) \to min \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_j [x(i,j) + x(j,i)] \geq 1 \text{ для всех } i\epsilon X \qquad (2)$$

$$\sum_{(i,j)\epsilon U_m} x(i,j) \geq n_m + 1, m = 1,2, \ldots, z \qquad (3)$$

$$x(i,j) \geq 0 \text{ для всех } (i,j) \qquad (4)$$

В соответствии с ограничением (2) требуется, чтобы по крайней мере одно ребро, принадлежащее покрытию, было бы инцидентно вершине i. Ограничение (3) означает, что по крайней мере (n_m+1) ребер, принадлежащих множеству U_m, должно входить в покрытие.

Целевая функция (1) представляет собой общий вес покрытия. Любое покрытие удовлетворяет ограничениям (2)-(4).

Задача, двойственная задаче (1)-(4), формируется следующим образом:

$$\sum_{i\epsilon X} y_i + \sum_{m=1}^{z} (n_m + 1) z_m \to max \qquad (5)$$

при ограничениях

$$y_i + y_j + \sum_{m:(i,j)\epsilon U_m} z_m \geq a(i,j) \text{для всех } (i,j) \qquad (6)$$

$y_i \geq 0$ для всех $i \epsilon X$ (7)
$z_m \geq 0, m = 1,2, \dots, z$ (8)

Условия дополняющей нежесткости для этой пары задач линейного программирования имеют следующий вид:

$x(i,j) > 0 \rightarrow y_i + y_j + \sum_{m:(i,j)\epsilon U_m} z_m = a(i,j)$для всех (i,j), (9)
$y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j \in X}[x(i,j) + x(j,i)] = 1, \forall i \in X$ (10)
т.е. вершина i покрывается только одним ребром.
$z_m > 0 \ \rightarrow \ \sum_{(i,j)\epsilon U_m} x(i,j) = n_m + 1, m = 1,2, \dots, z.$ (11)

Таким образом, $2n_m+1$ вершин в X_m покрывается n_m такими ребрами, что обе инцидентные каждому из них вершины принадлежат X_m, и одним таким ребром, что одна инцидентная ему вершина принадлежит X_m.

Из ограничений (6)-(8) следует, что $y_i \leq \min\{a(i,j), a(j,i)\}$. Вершина i называется насыщенной, если y_i принимает наибольшее допустимое значение. В противном случае вершина i называется ненасыщенной. Если $y_i=0$, то вершина i называется пустой.

Отметим, что соотношение (10) не относится к пустым вершинам и, значит, что только пустые вершины могут быть инцидентны более чем одному ребру, принадлежащему покрытию. Каждая насыщенная вершина должна быть соединена ребром с пустой вершиной.

Раздел 6. Потоки в сетях (0,5 час.)

Основные понятия и определения. Максимальный поток. Алгоритм поиска увеличивающей цепи. Пример. Алгоритм поиска максимального потока. Пример. Экономические аспекты применения задачи. Поток минимальной стоимости. Алгоритм поиска потока минимальной стоимости. Пример. Обоснование алгоритма поиска потока минимальной стоимости. Экономические аспекты применения задачи. Максимально динамический поток. Алгоритм поиска максимально динамического потока. Обоснование алгоритма поиска максимально динамического потока. Экономические аспекты применения задачи. Поток наискорейшего прибытия. Алгоритм поиска потока наискорейшего прибытия. Пример. Обоснование алгоритма поиска потока наискорейшего прибытия. Экономические аспекты применения задачи.

Раздел 7. Центры графов и сетей (0,5 час.)

Главный центр. Абсолютный центр. Главный абсолютный центр. Метод Хакими (нахождение абсолютного центра). Пример. Модифицированный метод Хакими (нахождение абсолютного центра). Пример. Итерационный метод (нахождение абсолютного центра). Пример. Экономические аспекты применения задачи. Главный абсолютный центр. Метод Хакими (нахождение главного абсолютного центра). Пример. Модифицированный метод Хакими (нахождение главного абсолютного центра). Пример. Экономические аспекты применения задачи.

Раздел 8. Изоморфизмы графов (0.5 час.)

Основные понятия и определения. Постановка задачи поиска изоморфизма графов. Определение и классификация задач на сопоставление графов. Строгое и нестрогое сопоставление графов. Сопоставление графов с использованием фиктивных вершин. Соответствие графов, разрешающее более одного соответствия для каждой вершины. Сложность сопоставления графов. Строгое соответствие графов: изоморфизм графов. Строгое соответствие подграфов: изоморфизм подграфов. Нестрогое соответствие графов: гомоморфизмы графов и подграфов.

Разделы 9-15. Социальные и экономические сети (0,5 час.)

Термин «сложные сети», а именно так обобщенно называются аналитические, социальные и экономические сети, возник в начале 21-го века и относится к сетям с более сложной архитектурой, чем, классические сети с заданным числом узлов и связей (транспортные, энергетические, коммунальные, сети связи и т.д.).

Сложные сети являются предметом нашей повседневной жизни, находящей отражение в современных экономических и социальных сетях, и, одновременно, объектом изучения в биологии, экономике, математике, психологии, социологии, инженерии, компьютерных науках. Таким образом, сложные сети – это бурно развивающееся явление сетевой экономики и социальных сетей, требующее от науки нового междисциплинарного подхода, а от образования новых образовательных дисциплин, таких как «Социально-экономические и информационные сети: модели и методы анализа».

Государство применяет сложные сети для организации управления, обеспечения безопасности, выявления потенциальных угроз и выстраивания политики. Последним уровнем государственного управления является правительства краев и областей России, где сетевые технологии управления применяются для стратегического планирования, оценки регулирующих воздействий региональных и федеральных законов, создания соответствующей законодательной базы; анализа и внедрения государственно-частного партнерства.

Бизнес использует сети для управления производством, продвижения товаров и услуг, в целеполагании, прогнозировании и стратегическом планировании.

Домашние хозяйства применяют сети для организации собственной жизни, развития человеческого капитала, организации взаимодействия с властью и бизнесом.

Социальные сети, примерами которых являются Instagram, Google, Twitter, Yelp, WhatsApp, Facebook и др., образуют «моментальную нацию», наиболее типичные фабрики данных в новой цифровой экономике. В отличие от бывших промышленных производств фабрики 21-го века действуют повсюду, где есть подключённый к сети девайс. Труд на этих маленьких девайсах — непрерывный поток твитов, постов, поисковых запросов, обновлений, просмотров, комментариев и снимков — создает всю стоимость в сетевой экономике. Для управления этим хозяйством нужны аналитики, содержанием подготовки которых является дисциплина «Социально-экономические и информационные сети: модели и методы анализа».

История возникновения (работы Jacob Moreno, Anatol Rapoport, William Horvath). Социальные сети представляют собой множество людей или групп людей, которые обладают некоторой системой контактов или взаимодействий между собой, такие как: дружба между индивидуумами, деловые отношения между компаниями, брачные отношения между семьями и т.д. [9]

Одним из первых исследователей социальных сетей был Якоб Морено. В 20-30 годах прошлого века он заинтересовался характером дружбы в рамках небольших групп. На рисунке 2 представлена сеть содружества между мальчиками и девочками, учащихся четвертого класса, построенная Якобом Морено. Визуально можно заметить, как сильно эти две группы разделены по половому признаку; за исключением лишь одного мальчика, выбравшего в качестве друга девочку.

В 1961 году математик Anatol Rapoport в совместной работе с William Horvath также исследовали товарищеские взаимоотношения в школе среди младших классов. Они одни из первых попытались описать математически полученную графическую модель, и подчеркнули значимость распределения степеней в сетях.

Экономические сети, в свою очередь, представляют собой набор экономических агентов, имеющих между собой экономические отношения. Примерами таких отношений являются: внешняя торговля между странами, долговые обязательства между банками или людьми.

Часто социальные сети часто служат средством передачи информации в экономической сфере. Например, при распространении товара и услуг, не обращающихся на рынке. В роли такого «товара» может выступать информация о вакансиях, технологиях, продуктах [9].

В дальнейшем сети будут представляться в виде графа, где набор элементов сети (индивидуумы, экономические агенты) обозначаются вершинами графа, а отношения между ними будут обозначаться как ребра графа. Если ребру графа сопоставлено определенное число, то такой граф будем называть взвешенным графом.

Свойства сетей. Сети в реальном мире обладают определенными свойствами, которыми не всегда обладают модели случайных графов. Основной задачей исследователей является получение модели сети, соответствующую тем или иным свойствам реальных сетей.

Эффект маленького мира. Эффект маленького мира представляет собой идею, что большие сети склонны иметь маленький диаметр и маленькую среднюю длину геодезической цепи. Геодезической цепью графа называется кротчайшая простая цепь, принадлежащая сети соединяющая две вершины u и v. Цепью называется последовательность из чередующихся вершин и ребер, начинающаяся, и заканчивающаяся вершиной. Диаметром графа называется длина (количество ребер) самой длинной геодезической цепи между любыми двумя вершинами.

В 60-х годах прошлого века Стенли Милграм провел эксперимент по исследованию длины цепи в обществе, в котором люди должны были передать письмо через своих знакомых человеку, которого они не знали. Письма были распределены между людьми проживающих в штатах Канзас и Небраска, им было сообщено имя, профессия, и некоторые приближенные данные о нахождении адресата, проживающего в штате Массачусетс. Участники эксперимента должны были передать письмо своим знакомым, вероятно знающим адресата, либо которые могли бы передать его другому знакомому. Приблизительно, только четверть писем достигло цели, и среднее число людей, участвующих в передаче письма было равно 5, а максимальное число – 12. Данные письма не обязательно следовали кратчайшему пути, но, тем не менее, число участников в цепи достаточно малое, что демонстрирует эффект маленького мира [6]. В настоящее время эффект маленького мира изучен и установлен в большом количестве различных сетей. Цепью называется чередующаяся последовательность вершин и различных ребер, начинающаяся и заканчивающаяся в вершине.

Кластеризация. Одним из важных наблюдений в социальных сетях является то, что они склонны иметь высокий коэффициент кластеризации. Идея кластеризации важна в социологии, где уделяют внимание треугольникам (трем взаимно связанным вершинам) в социальной сети.

Если в графе вершина A является смежной вершинам B и C, то коэффициент кластеризации сети показывает вероятность того, что вершины B и C смежны между собой. Коэффициент кластеризации для вершины i графа G определяется по формуле:

$$C_i = \frac{|\{jk \in G: k \neq j, j \in N_i(G), k \in N_i(G)\}|}{|\{jk : k \neq j, j \in N_i(G), k \in N_i(G)\}|} = \frac{|\{jk \in G: k \neq j, j \in N_i(G), k \in N_i(G)\}|}{d_i(G)(d_i(G)-1)/2}, \qquad (1)$$

где $N_i(G)$ обозначает множество вершин смежных вершине i в графе G, $d_i(G)$ – степень вершины i в графе G.

По-другому формулу 1 можно представить как отношение количества треугольников с вершиной i к количеству троек с центром в вершине i.

$$C_i = \frac{\text{количество треугольников с вершиной } i}{\text{количество троек с центром в вершине } i}, \qquad (2)$$

где тройкой с центром в вершине i будем называть цепь длины 2 с центром в вершине i.

Средний коэффициент кластеризации равен:

$$C = \frac{1}{n}\sum_i C_i \qquad (3)$$

Существует глобальный коэффициент кластеризации, или его еще называют коэффициентом транзитивности, который вычисляется по следующей формуле:

$$C = \frac{3 * \text{количество треугольников в графе}}{\text{количество троек в графе}}.$$

Гомофилия. Многие социальные сети обладают свойством гомофилии, названной Lazarsfeld и Merton. Данное свойство отражает тот факт, что люди более склонны поддерживать отношения с людьми из схожей группы. Группы могут быть различными, отличающиеся признаками такие как возраст, расса, пол, религия или профессия. На пример, основываясь на национальных опросах, Marsden определил, что только 8% людей обсуждают «важные вопросы» с людьми другой рассы. Гомофилия представляет собой важный аспект социальных сетей, так как он означает, что социальные сети могут быть сильно разделены на разные группы [6].

Существует 2 различные формы гомофилии: гомофилия, связанная с предоставленными возможностями, и гомофилия, связанная с выбором. Например, большинство детей в школе имеют лучших друзей близких по возрасту к собственному. В основном это обусловлено дружественными отношениями с детьми, с которыми они постоянно взаимодействуют в школе. Этот пример показывает гомофилию, связанную с предоставленными возможностями. Но даже в таком случае, присутствует тенденция формировать непропорциональную долю отношений с детьми своего возраста, что основано ряде факторов, включающих зрелость детей и их интересы. Такие факторы представляют собой гомофилию, связанную с выбором индивида.

Слабые связи в сети. В 1973 году Марк Грановеттер опубликовал одну из самых влиятельных работ в социальных сетях по исследованию слабых связей. В своей работе он определил силу связи как комбинацию продолжительности, эмоциональной интенсивности, близости или взаимного доверия [5]. Также он изучил роль силы связи в социальной сети в нахождении работы участниками сети. Он опросил людей разных профессий одного из городов штата Массачусетс о том, как они нашли свою работу, при этом он отмечал не только социальные контакты при поиске работы, но и силу социальных отношений, измеренную в частоте взаимодействий между индивидуумами за последний год. Из 64 опрошенных человек 16,7% нашли работу через сильную связь (взаимодействие с человеком не реже, чем 2 раза в неделю), 55,7% через среднюю связь (менее 2 раз в неделю, но чаще, чем раз в год) и 27,6% через слабую связь (реже, чем раз в год).

Идея Грановеттера заключалась в том, что индивидуумы, имеющие между собой слабую связь, наименее вероятно имеют между собой общих знакомых, чем индивиды, имеющие сильную связь. Такие связи более вероятно формируют «мосты» между группами, имеющими малое количество связей между собой, и таким образом играют ключевую роль в распространении информации. Грановеттер приходит к заключению, что слабые связи играют связывающую роль во взаимодействиях между группами, в то время, как сильные связи отвечают за сплоченность внутри группы и увеличивают общее разделение в обществе.

Модели случайных графов. Первые модели, которые пытались выделить тип графов, отвечающих свойствам и структурам сетей в реальном мире появились из теории графов, и предполагали, что сети формируются случайным образом.

Модель случайного графа Эрдеша-Реньи. На рубеже 50-х и 60-х годов XX века модель случайного графа предложили математики П. Эрдеш и А. Реньи независимо с А. Рапопортом. Данная модель также имеет название «Случайный граф Пуассона» или «Граф Бернулли». Данная модель не позволяет построить графы с кратными ребрами, графы с петлями и ориентированные графы.

Пусть дано множество вершин $V = \{1, \dots, n\}$. На этом множестве вершин построим случайным образом множество ребер. Максимальное количество ребер, которое может быть построено на n вершинах равно $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{2}$. Предположим, что ребро между любыми двумя вершинами i и j образуется с вероятностью $p \in [0,1]$ независимо от всех остальных $C_n^2 - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - 1$ пар вершин. Таким образом, ребра появляются в соответствии со стандартной схемой Бернулли, в которой C_n^2 испытаний, и вероятность появления ребра p. Такой случайный граф Эрдеша-Реньи обозначается как $G_{n,p}$, где p обозначает вероятность возникновения ребра. Обозначив через E случайное множество ребер, которое возникает в результате реализации данной схемы, а за M – множество всех возможных ребер графа, получим вероятность формирования $|E|$ ребер в графе равное $p^{|E|}p^{|M|-|E|}$, где $|M| = \frac{n(n-1)}{2}$. Такая модель случайного графа Эрдеша-Реньи обозначается $G = (V, E)$ [12]. На самом деле, $G = (V, E)$ представляет собой один из множества случайных графов с n вершинами, и количеством ребер равным $|E|$.

Для случайного графа легко находится распределение степеней вершин графа. Степень вершины – это число инцидентных ей ребер. Распределение степеней вершин в случайном графе описывает вероятность того, что любая заданная вершина имеет степень не меньше d_i. Таким образом, вероятность, что любая вершина i имеет строго степень d равна:

$$p_{d_i} = \binom{n-1}{d_i} p^{d_i}(1-p)^{n-1-d_i}. \qquad (4)$$

Несмотря на то, что ребра формируются независимо друг от друга, существует некоторая корреляция между степенями различных вершин. При увеличении числа вершин n корреляция между степенями любых двух вершин исчезает, так как существует только одно ребро между ними из $n-1$ возможных инцидентных ребер для каждой вершины. При большом n и маленьком p биноминальная формула вероятности (4) приближенно равна распределению Пуассона, таким образом доля вершин, имеющих d_i инцидентных ребер приближенно равна:

$$p_{d_i} \approx \frac{e^{-(n-1)p}\left((n-1)p\right)^{d_i}}{d_i!} = \frac{e^{-k}k^{d_i}}{d_i!}, \tag{5}$$

Где $\mathrm{k} = (\mathrm{n}-1)\mathrm{p}$ – это средняя степень вершины при $\mathrm{n} \gg 1, \mathrm{p} \ll 1$.

Ожидаемая структура случайного графа зависит от значения вероятности p. Анатоль Рапопорт, Рэй Соломонофф и Пол Эрдеш, Эдгар Реньи продемонстрировали важное свойство случайных графов: фазовый переход (phase transition). Фазовый переход подразумевает собой переход случайного графа от одного типа структуры к другой при изменении вероятности формирования ребра. Предположим, что в модели случайного графа Пуассона вероятность формирования ребра зависит от количества вершин, и обозначим вероятность $p(n)$. Пусть структура графа является его свойством, которое описывается перечислением всех возможных графов, обладающих этим свойством, на множестве графов с заданным множеством вершин N, и обозначается $A(N) \subset G(N)$. Например, такое свойство, что граф не имеет изолированных вершин (вершин со степенью равной нулю), описывается как $A(N) = \{g | d_i(g) \neq \emptyset \ \forall i \in N\}$, где d_i – степень вершины i. Тогда для определенного свойства графа задается пороговая функция $t(n)$ следующим образом:

$$P[A(N)|p(n)] \to 1, \text{если} \frac{p(n)}{t(n)} \to \infty, \text{и}$$
$$P[A(N)|p(n)] \to 0, \text{если} \frac{p(n)}{t(n)} \to 0.$$

Если существует такая пороговая функция, то говорят, что возникает фазовый переход в значении пороговой функции.

Обозначим основные свойства случайного графа Пуассона и их пороговые функции:

1) При пороговой функции $t(n) = 1/n^2$ возникают первые ребра, т.е. при $p(n)$ большего порядка, чем $1/n^2$, существует хотя бы одно ребро в графе с вероятностью, стремящейся к 1;

2) При $p(n)$ большей, чем $t(n) = n^{-\frac{3}{2}}$ вероятность того, что в графе присутствует хотя бы одна компонента, имеющая как минимум три ребра, стремиться к 1;

3) При $p(n)$ большей, чем $t(n) = 1/n$ в графе образуются циклы, и возникает гигантская компонента, содержащая нетривиальную долю вершин;

4) При $p(n)$ большей, чем $t(n) = \log(n)/n$, граф становиться связным.

Модель случайного графа Эрдеша-Реньи позволяет вычислить размер гигантской компоненты с помощью следующих эвристических вычислений. Сгенерируем случайный граф Пуассона с $n-1$ вершиной и вероятностью формирования ребра $p > 1/n$. Добавим в граф вершину, и соединим её с остальными вершинами с вероятностью p. Пусть q – это доля вершин, принадлежащих гигантской компоненте графа из $n-1$ вершины. При большом значении n, q будет также будет долью вершин, принадлежащих гигантской компоненте графа из n вершин. Вероятность того, что добавленная вершина не принадлежит гигантской компоненте равна вероятности того, что ни одна из смежных ей вершин не принадлежит гигантской компоненте. Если добавленная вершина имеет степень d_i, то данная вероятность сходиться к $(1-q)^{d_i}$, при больших n. Общую долю вершин, не принадлежащих гигантской компоненте может быть найдена усреднением величины $(1-q)^{d_i}$ по всем вершинам:

$$1 - q = \sum_d (1-q)^d P(d). \tag{6}$$

Подставляя в (6) формулу (5), то получаем приближенную долю вершин, не принадлежащих гигантской компоненте:

$$1 - q = \sum_d \frac{e^{-(n-1)p}\left((n-1)p\right)^d}{d!}(1-q)^d = e^{-(n-1)p}\sum_d \frac{\left((n-1)p(1-q)\right)^d}{d!} = e^{-q(n-1)p}.$$

Таким образом, получаем:

$$q = 1 - e^{-q(n-1)p}. \quad (7)$$

Одно из решений уравнения (7) при $q = 0$. Тогда и только тогда, когда средняя степень вершины больше единицы, т.е. при $p > 1/(n-1)$, существует решение для q лежащее между 0 и 1. Данные вычисления показывают наличие фазового перехода, означающим возможность появления гигантской компоненты при пороге в $(n-1)p = 1$. Это показывает различие в структуре случайных графов при средней степени больше или меньше 1.

Случайные графы отражают одно из свойств реальных сетей – маленькая средняя длина кротчайшей цепи между вершинами, называющийся эффектом малого мира. Поскольку k – это среднее значение степени вершины, а это значит, что, выбирая произвольную вершину, она будет иметь в среднем k смежных вершин. В свою очередь, эти вершины будут иметь k^2 смежных вершины (их количество k, и еще k смежных ребер). После l шагов, получаем k^l по отношению к первоначально выбранной вершине. Очевидно, что добавление новых вершин продолжается не бесконечно, процесс останавливается по достижению n вершин:

$$k^l = n,$$

откуда диаметр случайного графа равен:

$$l = \frac{\log n}{\log k}$$

Однако, для современного мира $n \approx 6 * 10^9$, в соответствии с полученным значением $l \leq 6$ в ходе эксперимента Stanley Milgram, получаем, что $k \approx 42{,}6$, что не соответствует реальности, так как каждый взятый в отдельности человек по большей части имеет более чем 42 знакомых.

Это говорит о том, что, нельзя утверждать, что реальные жизненные сети можно смоделировать, в частности, пуассоновским случайным графом. Тем не менее, все последующие исследования начались с изучения базовых понятий пуассоновского случайного графа.

Конфигурационная модель (configuration model) случайного графа. Случайные графы могут быт расширены множеством способов для того, чтобы они лучше соответствовали реальным сетям. Одна из таких моделей – конфигурационная модель, позволяющая создавать сети с точно заданным распределением степеней вершин (degree distribution), что в свою очередь позволяет генерировать различные сети с тем же распределением, как заданная модель.

Зададим распределение степени в сети p_d так, что p_d –вероятность того, что случайно выбранная вершина имеет степень d. Назовем последовательностью степеней (degree sequence) набор значений степеней d_i вершин $i = 1 \ldots n$ из этого распределения. Таким образом, можно считать, что у каждой вершины i в рассматриваемом графе есть «корешки ребер», или их еще называют «хвосты ребер» в соответствии со значением d_i. Далее, случайным образом выбираем пары «хвостов» из сети и соединяем их в ребра и проделываем эту операцию до тех пор, пока не исчезнут все «хвосты».

Таким образом, ребра формируются случайным образом, исходя из того, что вероятность, что вершины i и j окажутся смежными:

$$p_{ij} = \frac{d_i d_j}{\sum_{i=1}^{n} d_i} = \frac{d_i d_j}{2m}$$

Заметим, что чем выше степень у вершин i и j, тем больше вероятность того, что вершины являются смежными.

Модели сети маленького мира. Модели маленького мира ставят перед собой цель описать существующие сети, обладающие свойствами эффекта маленького мира и высокой степени кластеризации. Модели случайных графов отражают эффект маленького мира, но коэффициент кластеризации в таких сетях остается на низком уровне. Далее описываются различные модели маленького мира.

Модель сети маленького мира Уоттса и Строгаца. Первая модель маленького мира в графовой постановке была предложена Уоттсом и Строгацом (Watts and Strogatz 1998) и генерация графа представляет собой следующую процедуру: пусть имеем одномерную решетку, имеющую N вершин, с периодичными граничными условиями (т.е. кольцо), где каждая вершина соединена с её ближайшими k вершинами, далее каждое ребро первоначального графа переопределяем с вероятностью p. Процесс переопределения включает проход по часовой стрелке через каждое ребро, и с вероятностью p перемещения одного конца ребра от одной вершине к другой случайной вершине решетки, но при этом запрещено появление петель и кратных ребер.

В модели требуется условие $n \gg k \gg \ln(n) \gg 1$, где условие $k \gg \ln(n)$ гарантирует связность графа. В такой модели при $p = 0$ мы получаем регулярную решетку. В регулярной решетке коэффициент кластеризации равен $C = \frac{3(k-2)}{4(k-1)}$, и стремиться к $\frac{3}{4}$ при k стремящимся к бесконечности. Тем не менее, в регулярной решетке длина средней геодезической цепи между двумя вершинами вычисляется как $L = \frac{n(n+k-2)}{2k(n-1)}$, и при больших k стремиться к $\frac{n}{2k}$.

Баррат и Вейгт показали, что при переопределении ребра с вероятностью p коэффициент кластеризации равен $C(p) = \frac{3(k-2)}{4(k-1)}(1-p)^3$. При $p = 0$ коэффициент кластеризации равен коэффициенту кластеризации в регулярной решетке. При $p > 0$две соседние вершины i, которые были смежными при $p = 0$ все еще являются соседними вершинами по отношению к i,и являются смежными по отношению друг к другу с вероятностью$(1-p)^3$. Тогда коэффициент кластеризации определяется, как отношение среднего числа ребер между соседними вершинами и среднего числа возможных ребер между соседними вершинами.

Для определения средней геодезической цепи на настоящий момент точной формулы не существует, но известно, что $L \sim \frac{\ln(n)}{\ln(k)}$, при $P \to 1$. Т.е. в модели маленького мира средняя геодезическая цепь возрастает логарифмически с увеличением n. На рисунке 3 показан график зависимости отношения $\frac{C(p)}{C(0)}$ и $\frac{L}{\max(L)}$ от вероятности p. Как показано на рисунке 3, между $p = 0$ и $p = 1$ существует область, где коэффициент кластеризации высок, а средняя длина геодезической цепи между вершинами одновременно мала. Эта область соответствует определению модели маленького мира.

Как было показано Уоттсом граф является графом маленького мира с n вершинами и средней степенью вершин k, если одновременно выполняются следующие условия:

1. $L \approx L_{random}(n, k)$, где $L_{random}(n, k)$ – это средняя длина геодезической цепи случайного графа «Эрдеша – Реньи»;
2. $C \gg C_{random} \approx \frac{k}{n}$.

Таким образом, для выявления, является сеть – сетью маленького мира, достаточно проверить выполнимость вышеперечисленных условий.

Высокий коэффициент кластеризации и маленькая средняя длина кротчайшей цепи отражают такие свойства социальной сети, как гомофилия (homophily) и слабые связи (weak ties).

Модель маленького мира Ньюмана и Уоттса. Модель маленького мира Ньюмана и Уоттса (Newman and Watts) является модернизацией модели Уоттса-Строгаца. Генерация обоих моделей начинается с одномерной регулярной решетки на N вершинах, где каждая вершина смежна с k её ближайшими вершинами. Но вместо переопределения ребер, в данной модели между случайно выбранными парами вершин добавляются дополнительные ребра, называемые «сокращениями» (shortcuts), и в тоже время ни одно ребро не удаляется из основополагающей решетки.

Рассмотрим данную модель в случае двумерной решетки, и покажем, как модель отражает свойства гомофилии и слабых связей в сети. Предположим, что человек живет в двумерной сети – это может быть примером географического расстояния и социальной близости, благодаря чему в сети могут возникнуть ребра между вершинами. Положим, что две вершины находятся в шаговой доступности (grid step) в сети, если они смежные по отношению друг к другу либо в горизонтальном, либо вертикальном направлениях. Теперь создадим сеть, где каждой вершине инциденты два вида ребер: те, которые будут представлять свойство гомофилии, и тех, которые представляют слабые связи. Пусть для некоторой постоянной величины r каждая вершина создает ребро со всеми другими вершинами, которые лежат в радиусе шаговой доступности меньшей или равной r - это соответствует свойству гомофилии.

А для некоторого другого постоянного значения k, узел также формирует ребро со случайно k выбранными другими узлами из сети, ранее не связанными друг с другом - это соответствует свойству слабых связей.

Такая сеть имеет множество триад: две соседние вершины имеют общего друга и более того, с высокой вероятностью найдутся пары вершин с короткой длиной пути (short paths connecting) между ними.

Коэффициент кластеризации в данной модели был найден Марком Ньюманом и представляет собой:

$$C = \frac{3(k-1)}{2(2k-1)+4kp(p+2)}$$

Модель взвешенной сети маленького мира. Не смотря на распространённое применение моделей невзвешенных графов в моделировании социальных сетей, многие сети ограничиваются описанием не только топологического представления, но и движением информации в сети или транспортными потоками, которые имеют место быть в определенной сети. Например, однородность в частоте взаимодействий может быть важным в понимании социальных систем, аналогично, необходимо учитывать такие фундаментальные показатели как транспортный поток, характеризующий связи в системе коммуникаций, а также огромную транспортную инфраструктуру, являющуюся фундаментальным показателем для полного описания таких сетей.

Под взвешенной сетью граф, в котором каждое ребро имеет количественную характеристику, данная характеристика называется весом ребра. Для описания взвешенной сети используется взвешенный полный граф, в котором ребра, которые соответствуют отсутствующим связям в сети, имеют нулевой вес. В модели предполагается неориентированный граф, в котором вес ребра W_{ij} между вершинами i и j неотрицательны. На рисунке 8 приведен пример взвешенного графа.

Для проверки свойств маленького мира в взвешенной сети, необходимо ввести новую меру взвешенного коэффициента кластеризации (WCC_i) и длины взвешенной геодезической цепи. Для коэффициента кластеризации взвешенной сети необходимо, чтобы выполнялось требование $WCC_i \to C_i$ в случае бинарного вида весов, т.е. вес ребра равен либо 0, либо 1. В работе Wenyuan, Yongjing, Ying, предложили следующую обобщенную формулу вычисления коэффициента кластеризации вершины i со степенью k_i для взвешенных графов:

$$WCC = \frac{2}{k_i(k_i-1)}\sum_{j,h}\min(\widetilde{w}_{ij},\widetilde{w}_{jh},\widetilde{w}_{hi}), \qquad (8)$$

где $\widetilde{w}_{ij}$- нормированный вес ребра между вершинами i и j, вычисляемая как отношения веса данного ребра к наибольшему весу ребра в сети, т.е. $\widetilde{w}_{ij} = w_{ij}/\max(w_{kl})$, что позволяет нормировать коэффициент кластеризации, как долю потока между двумя вершинами от максимального потока в треугольнике. Коэфициент кластеризации графа вычисляется как среднее занчение коэффициента кластеризации каждого ребра:

$$WCC = \frac{1}{n}\sum_{i} WC_i. \qquad (9)$$

Другая формула расчета коэффициента кластеризации была предложена Барратом и соавторами. Предложенная формула учитывала важность структуры кластера, беря за основу интенсивность взаимодействий в кластере, и определялась как

$$\widetilde{C}_i = \frac{1}{s_i(k_i-1)}\sum_{j,h}\frac{w_{ij}+w_{jh}}{2}a_{ij}a_{ih}a_{jh}, \qquad (10)$$

где s_i – это сила (strength) вершины i, определяемая, как $s_i = \sum_j^N a_{ij}w_{ij}$, и a_{ij} – это элемент бинарной матрицы смежности. Количественное измерение силы вершины показывает общий вес инцидентных вершине ребер, другими словами, сила вершины показывает количество потока, проходящего через вершину. Например, Баррат и соавторы в работе рассмотрели структуру сети авиасообщений из базы данных International Air Transportation Association (www.iata.org), где вершинами соответствовали аэропорты, а вес ребра отображал количество доступных мест по перелету между аэропортами за 2002 год. Сеть авиасообщений содержала 3 880 вершин (аэропортов) и 18 810 ребер, обозначающих возможность прямого перелета между аэропортами. Баррат и соавторы показали, что данная сеть является сетью маленького мира, если не учитывать вес ребер. Для формулы коэффициента кластеризации в сети авиасообщений сила вершины показывает количество человек, которое потенциально мог обслужить аэропорт в 2002 году.

Также Баррат и соавторы рассмотрели структуру сети соавторства ученых, где вершины обозначили ученых, а ребра соответствовали тому, являлись ли ученые соавторами хотя бы в одной статье. Вес ребра в данном случае показывал интенсивность взаимодействия ученых i и j, и определялся как $\mathrm{w_{ij}} = \sum_p \frac{\delta_i^p \delta_j^p}{n_p - 1}$ если $i \neq j$, $w_{ii} = 0$, где индекс p пробегает по всем научным статьям, n_p – это количество авторов в статье p, и δ_i^p равно 1, если автор i принимал участие в написании статьи p, и равно 0 в противном случае. Определение интенсивности взаимодействий в социальной сети всегда зависит от объектов, которые описывает сеть, но в сети соавторства данное определение отражает взаимодействие ученых между собой: вклад каждого ученого в одну статью тем меньше, чем больше авторов статьи.

Коэффициент кластеризации, рассчитанный по формуле (10), является мерой локальной ссплочённости, который учитывает важность кластерной структуры базиса, основанной на интенсивности движения транспорта либо взаимодействий в тройке вершин с центром в вершине i. Формула (10) учитывает вес только двух ребер, инцидентных вершине i (w_{ij} и w_{ih}), и игнорирует вес третьего ребра (w_{jh}). Более того данное определение коэффициента кластеризации не удовлетворяет требованию $WCC_i \to C_i$, при бинарном виде весов [16]. Множитель $1/s_i(k_i - 1)$ нормализует коэффициент, учитывая вес каждого ребра, инцидентного вершине, умноженный на максимальное возможное количество треугольников с вершиной i.

Оннела и соавторы предложил формулу коэффициента кластеризации, основанную на средней геометрической мере весов ребер [11]:

$$\hat{C}_i = \frac{2}{k_i(k_i - 1)} \sum_{j,h} (\widetilde{w}_{ij}, \widetilde{w}_{jh}, \widetilde{w}_{hi})^{\frac{1}{3}}. \quad (11)$$

Формула (11) так же удовлетворяет требованию $\widehat{C_i} \to C_i$, при бинарном виде весов.

Коэфициент кластеризации графа вычисляется как среднее занчение коэффициента кластеризации каждого ребра:

$$\hat{C} = \frac{1}{n} \sum_i \hat{C}. \quad (12)$$

Занг и др. предложли модель расчета коэффициента кластеризации вершины в взвешенной сети, учитывая только веса ребер:

$$C_3^w(i) = \frac{\sum_{i \neq h} \sum_{j \neq i, j \neq h} w_{ij} w_{jh} w_{hi}}{\sum_{j \neq h} w_{ij} w_{ih}}. \quad (13)$$

Формула (13) считает общую интенсивность взавимодействий в тройках вершин для частной вершины i, нормированный коэффициент между значениями 0 и 1 по взаимодейсвиям во всех цепях длины 2 с серединой в вершине v_i. Данная модель склонна давать сбой в идентификации треугольников в сети. Ошибка происходит в случае, когда вес одного из ребер в треугольнике значительно меньше весов остальных ребер и коэффициент кластеризации остается высоким. Ошибка идентификации заключается в том, что треугольник с вершиной i идентифицируется машиной как тройка с центром в вершине i.

В работе предлагается модель расчета коэффициента кластеризации в взвешенной цепи на основе формулы 9:

$$C^w(i) = \frac{3 \sum_{j,h \neq i} w_{ij} w_{jh} w_{hi}}{\sum_{j,h \neq i} w_{ih} w_{hj} + \sum_{j,h \neq i} w_{ij} w_{jh} w_{hi}}. \quad (14)$$

Формула (14) трактует вес ребра w_{ij} как вероятность прохождения потока информации между вершинами i и j напрямую, без вершин в цепи между ними. Коэффициент кластеризации рассчитывается как отношение общей вероятности формирования треугольника по отношению к вероятности всех возможных связных графов с тремя вершинами, содержащих вершину i. Такое приближение так же гарантирует, что значения коэффициента лежат между значениями 0 и 1.

Формулы (13) и (14) позволяют найти значимые вершины в сети, вершины, через которые наиболее вероятно прохождение информации. Такие вершины могут быть ключевыми в формировании сообществ в социальной сети. В работе была рассмотрена взвешенная сеть Каратэ Клуба Захари (Zachary), представленная на рисунке 10, где вес ребра означал частоту общения между членами клуба. Авторами было замечено, что вершины 1, 33 и 34 имеют более высокий коэффициент кластеризации, и наименьший коэффициент кластеризации имеют вершины 15 и 16, которые являются обычными членами клуба. Вершины 1, 33 и 34 соответствуют наиболее старшим членам клуба, и отношения между этими членами являются ключевыми в формировании двух подгрупп в Каратэ Клубе. Таким образом, формулы взвешенного коэффициента (13, 14) позволяют идентифицировать центральные, с точки зрения важности формирования групп, вершины.

Для расчета длины цепи в взвешенном графе предлагается определить расстояние между двумя вершинами, если между ними существует ребро, как величину обратную весу ребра между заданными вершинами. Такой метод используется, если вес ребра обозначает силу или интенсивность взаимодействий между вершинами. Таким образом, чем сильнее взаимодействие между вершинами, тем меньше расстояние между ними.

В работе Bolanos, Bernat, Aviyente предложили следующую модель расчета длины цепи. Предполагается, что от веса ребер в цепи P_{ij} зависит объем потока информации передаваемый в цепи от вершины i к вершине j, где $P_{ij} = \{w_{i,q_1}, w_{q_1,q_2}, \ \dots \ , w_{q_m,j}\}$ – последовательность весов ребер в цепи и $Q = \{q_1, q_2, \dots \ , q_m\}$ – это последовательность вершин в цепи P_{ij}. Далее применяется алгоритм поиска максимального потока от вершины i к вершине j, где функция потока задается как $F_{ij} = w_{iq_1}, w_{q_m j} \prod_{l=2}^{m} w_{q_{l-1} q_l}$. Тогда длина взвешенной цепи определяется как

$$L^w(i) = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \frac{1}{F_{ij}}. \quad (15)$$

Длина взвешенной цепи для вершины i является средней вероятностью передачи потока информации от вершины i ко всем остальным вершинам.

Для того, чтобы сеть являлась сетью маленького мира при измерении коэффициента кластеризации по формулам 4-8 и измерении средней длины взвешенной цепи, необходимо чтобы соблюдались те же 2 условия что и для невзвешенной цепи в сравнении с соответствующим ему случайным графом. Соответствующий случайный граф генерируется следующей процедурой, состоящей из двух шагов:

1) Для взвешенного графа генерируется невзвешенный случайный граф;
2) Веса взвешенного графа случайным образом распределяются по ребрам случайного невзвешенного графа.

Для определения принадлежности сети к с сети меленького мира, при рассчитанной средней взвешенной цепи для каждой вершины по формуле (11) и коэффициента кластеризации по формуле 10 предлагается нормировать коэффициент кластеризации и среднюю длину взвешенной цепи для вершины по средним значениям соответствующих показателей для суррогатного графа, т.е. $C^{w\prime}(i) = C^w(i)/\langle C_{rand}\rangle$ и $L^{w'}(i) = L^w(i)/\langle L_{rand}\rangle$, где суррогатный граф генерируется как случайная перестановка взвешенных ребер оригинального графа. Мера сети взвешенного маленького мира для каждой вершины определяется как $\sigma^w(i) = C^{w'}(i)/L^{w'}(i)$. Тогда существует локальный маленький мир в сети с центром в вершине i когда $\sigma^w(i) \gg 1$.

Модели роста сети. В отличие от стационарных сетей, существует особый класс случайных графов, в которых новая вершина появляется с течением времени и при появлении формирует ребра с существующими вершинами. Основной целью создания таких моделей была попытка описания моделей интернета, где новая станица создает ссылки на уже существующие. Подобными моделями можно описать и социальные сети. Например, установление новых знакомств, когда человек приходит в новую школу, нанимается на работу, или знакомится с соседями после переезда.

Модель Барабаши-Альберт. Одной из первых моделей, описывающих рост сети, была предложена А.-Л. Барабаши и Р. Альберт как модель, описывающая рост сети интернет. Суть модели состоит в следующем, пусть в каждый момент времени появляется одна вершина, и она формирует фиксированное количество ребер к уже существующим вершинам таким образом, что вероятность формирования ребра к существующей вершине пропорционально степени этой вершины. Модели случайных графов, основанные на описанной идее, называются моделями предпочтительного присоединения.

Рассмотрим модель Барабаши - Альберт более детально. Пусть вершины появляются с течением времени и проиндексированы по времени появления $i \in \{0, 1, 2, \dots, t, \dots\}$. Каждая ново появившаяся вершина формирует m ребер с уже существующими вершинам с вероятностью пропорциональной степени этих вершин. Таким образом, вероятность, что существующая вершина i сформирует ребро с новой вершиной в момент времени t равна $m\frac{d_i(t)}{\sum_{j=1}^{t} d_j(t)}$, где $d_i(t)$ – степень вершины i в момент времени t. Так как в сети в момент времени t, то $\sum_{j=1}^{t} d_j(t) = 2tm$. Следовательно, вероятность, что вершина i сформирует новое ребро в период t равно $\frac{d_i(t)}{2t}$.

Предполагается, что на начало процесса уже существует группа из m вершин, каждая смежная с каждой. Далее происходит определенный выше стохастический процесс. Процесс изменения степени вершины в непрерывном времени описывается следующей формулой:

$$\frac{dd_i(t)}{dt} = \frac{d_i(t)}{2t},$$

с начальным условием $d_i(i) = m$.

В работе H. Jeong, Z. Neda и A.L. Barabasi проверили гипотезу о линейности механизма предпочтительного присоединения на 4х реальных сетях: сети цитирования, интернет сети, сети соавторства и сети актеров. Авторы обозначают вероятность того, что вершина со степенью d сформирует ребро с новопоявившейся вершиной, как $\Pi(d)$,тогда изменение степени d_i вершины i записывается как:

$$\frac{dd_i(t)}{dt} = m\Pi\big(d_i(t)\big),$$

где $\Pi(d_i(t))$ имеет вид

$$\Pi\big(d_i(t)\big) = \frac{d_i^{\alpha}(t)}{\sum_j d_j^{\alpha}(t)} = C(t) d_i^{\alpha}(t),$$

с $\alpha > 0$ – неизвестный показатель степени. Где $\alpha = 1$ говорит о линейности функции вероятности от степени вершины, соответствующей стандартной модели предпочтительного присоединения. Для проверки гипотезы Jeong и соавторы [20] проверили значение α, и для каждой из четырех существующих сетей было подтверждено существование механизма предпочтительного соединения. Было показано, что вероятность присоединения ребра к существующей вершине рассчитывается по более сложной функции, в которой предполагается, что вероятность $\Pi(d(t))$ рассчитывается по степенному закону. Степень α уникальна для каждой сети: в то время как для сети интернет и сети цитирования множитель α близок к единице, и вероятность $\Pi(d(t))$ является линейной, то для сети актеров и сети соавторства степень $\alpha < 1$.

Модель Боллобаша-Риордана. Модель Боллобаша-Риордана также была создана с целью описания роста сети интернет, и поэтому по своим свойствам она схожа на модель Барабаши-Альберт.

Построим последовательность случайных графов $\{\mathrm{G}_1^{\mathrm{n}}\}$, в которой у графа n вершин и n ребер. Затем из полученной последовательности сделаем последовательность $\{\mathrm{G}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}\}$, в которой у графа с номером n число вершин равно n, а число ребер равно $kn, k \in \mathbb{N}$. Тогда, пусть $G_1^1 = (\{1\}, \{(1,1)\})$, т.е. в начальный момент времени имеем одну вершину и одну петлю. Пусть построен граф G_1^{n-1}, у него вершины образуют множество $\{1, \dots, n-1\}$, а количество ребер равно $n-1$. Добавим вершину n и ребро (n, i), у которого $i \in \{1, \dots, n\}$. Ребро (n, n) образуется с вероятностью $\frac{\deg i}{2n-1}$, где $\deg i$ – это степень вершины i в графе G_1^{n-1}. Случайный граф G_1^n построен и удовлетворяет принципу предпочтительного присоединения.

Для перехода к G_k^n выбираем граф G_1^{kn}. Этот граф имеет kn веришин и kn ребер. Делим множество его вершин на последовательные подмножества размера k:

$$\{1, \dots, k\}, \{k+1, \dots, 2k\}, \dots, \{k(n-1)+1, \dots, kn\}.$$

Объявляем каждое подмножество вершиной, а ребра сохраняем, т.е. если ребра принадлежали паре вершин, принадлежащих одному подмножеству, то образуются кратные петли, а если они принадлежали паре вершин из разных подмножеств, то получили кратные ребра. В итоге получаем случайный мультиграф.

Модели роста графов малого мира и их алгоритмы. Граф «Малого мира» - такой граф, в котором две произвольные вершины a и b с большой вероятностью не являются смежными, однако одна достижима из другой посредством небольшого количества переходов через другие вершины. Типичное расстояние L между двумя произвольно выбранными вершинами (количество шагов, необходимых, чтобы достичь одну из другой) растёт пропорционально логарифму от числа вершин N в сети.

В исходной модели Ватца и Строгаца предлагается следующий подход. Пусть N – число вершин, K – средняя степень вершины, β – специальный параметр, причем $0 \le \beta \le 1$. Модель строит ненаправленный граф N вершин и $\frac{NK}{2}$ рёбер следующим образом:

1) Строится кольцевая решетка – граф с N вершин, каждая из которых соединена с K соседними, по K/2 с каждой стороны. Ребро (ni, nj) существует тогда и только тогда, когда $0 < |i-j| \bmod (N-1-\frac{K}{2}) \le \frac{K}{2}$

2) Для каждой вершины ni берется ребро(ni, nj), где i<j и меняется на ребро (ni, nk), где k выбирается равновероятно среди всех значений помимо самого i и номеров уже соединенных с ним вершин (ребра не дублируются)

Традиционный алгоритм генерации сетей, описывающий рост безмасштабных графов, в том числе графов Эрдёша-Реньи и графов «Малого мира» (согласно модели Ватца-Строгаца) – модель Барабаши-Альберт (БА). Она включает в себя две важные общие концепции: рост графа и принцип предпочтительного присоединения. Обе концепции представлены в реальных примерах сетей.

Алгоритм работает следующим образом: граф начинается в виде начальной сетки с m_0 вершин. $m_0 \ge 2$ и степень каждой вершины в начальном графе должна быть не меньше 1, т.е. изолированные вершины отсутствуют.

В каждый момент времени в граф добавляется новая вершина. Каждая новая вершина соединяется с существующими с вероятностью, пропорциональной числу связей этих узлов. Формально, вероятность p_i того, что новая вершина соединится с вершиной i равна $p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$, где k_j – степень вершины i, а в знаменателе суммируются степени всех существующих узлов. Наиболее связанные вершины («хабы»), как правило, накапливают ещё больше связей, тогда как узлы с небольшим числом связей вряд ли будут выбраны для присоединения новых узлов. Новые узлы имеют «предпочтение» соединяться с наиболее связанными узлами. Графы, построенные данным алгоритмом, имеют более короткий средний путь, нежели случайный граф, средняя длина пути увеличивается как логарифм размера графа.

Современные модели роста. В работах Ozik, J., Hunt, B. и Aoyuan Peng, Lianming Zhang получил развитие следующий алгоритм детерминированного многомерного роста (DMG) графа «малого мира»:

1. На нулевом шаге (t=0) даны 4 первых вершины, которые соединяются дугами в подобие треугольной пирамиды

2. Начиная с первого шага ($t \ge 1$) граф DMG(t) формируется из графа DMG(t-1), полученного на предыдущем шаге, путем добавления новой вершины напротив каждой дуги исходного графа и соединения её дугами с концами этой дуги.

Очевидно, что на каждом шаге алгоритма, начиная с t=1, число генерируемых вершин составляет: $\Delta n_t = 3\times2^t$, $t\geq1$, а общее число вершин n_t составляет $n_t = n_0 + \Delta n_1 + \Delta n_2 + \ldots + \Delta n_t = 3\times2^{t+1} - 2$, а число дуг равно $e_t = 3\times2^{t+2} - 6$.

Средняя степень в таком графе стремится к 4 и составляет:

$$< k > (t) = \frac{2e_t}{n_t} = 4 - \frac{2}{3\times2^t - 1}$$

Функция распределения степени для такого графа представима в следующем виде:

$$p(k) = P(k' > k-1) - P(k' > k) = \frac{(\sqrt{2}-1)\times 2^{-\frac{k}{2}}}{1-1/(3\times2^t)}$$

Общий коэффициент кластеризации стремится к 0,693 и описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{n_t}[\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{i}\times\Delta n(t-i+1) + \frac{2}{3t+2}\times4] \\ &= \frac{1}{3\times2^{t+1}-2}[1\times3\times2^t + \frac{1}{2}\times3\times2^{t-1} + \cdots + \frac{1}{t}\times3\times2^1 + 4\times\frac{2}{3t+2}] \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3\times2^t}}\times\ln2 + \frac{4}{3\times2^{t+1}-2}\times\frac{2}{3t+2} \end{aligned}$$

Средняя длина пути в таком графе приблизительно равна $L(t) \approx 2t/3$, диаметр, соответственно, составляет приблизительно $D \approx 1.46\ln(n)$.

В работе Yilun Shang предлагается ассортативная геометрическая модель роста G(m,t), во многом аналогичная модели DMG. На каждом шаге к каждой дуге графа из числа появившихся на предыдущем шаге, «прирастает» уже m вершин, которые соединяются ребрами с вершинами-концами генерирующей дуги.

Таким образом, в данной модели рост графа ускоряется, что имитирует рост сети во многих реальных системах. Порядок, размер графа, средняя степень вершины представимы следующим образом:

$$|V(t)| = \frac{m(2m)^t + 3m - 2}{2m-1}, \qquad |E(t)| = \frac{(2m)^{t+1}-1}{2m-1}, \quad \bar{\delta}(t) = 4 - \frac{12m-6}{m(2m)^t + 3m - 2}.$$

В генерируемом таким образом графе, как и в графе DMG, степень стремится к 4.

Сопоставление параметров графов, генерируемых моделью детерминированного многомерного роста (DMG), и социальных графов сообществ сети Facebook

Среди рассмотренных моделей интерес для исследования представляет модель DMG, за малое число итераций генерирующая граф большой размерности со свойствами графа малого мира. Однако, для оценки её применимости и, возможно, модификации, необходимо сопоставить её с существующими социальными графами.

В качестве примера могут быть использованы исследованные в ходе производственной практики с использованием инструментальной среды Gephi графы активности сообществ социальной сети Facebook. Рассмотрим сообщества трёх университетов – ДВФУ, MIT и Кэмбриджского университета.

Табл. 1. Сравнение параметров графов активности на страницах в Facebook за 2015 год и графов с аналогичным числом вершин, генерируемых алгоритмом DMG

Граф		ДВФУ	MIT	Cambridge
Фактические параметры графа сообщества	Число вершин	1892	89293	219182
	Число дуг	5596	368062	692195
	Диаметр	8	6	7
	Средняя степень	5,915	8,245	6,316
	Средняя длина пути	3,457	14,437	20,183

	Коэфф. кластеризации	0	0	0
Параметры графа DMG с тем же числом вершин	Число дуг DMG	3776	178543	438416
	Диаметр DMG	7,54	11,39	12,29
	Средняя степень DMG	3,997	3,999	3,999
	Средняя длина пути DMG	12,45	20,8	15,157
	Коэфф. кластеризации DMG	0,698	0,694	0,693

Графы, созданные алгоритмом DMG для того же числа вершин, хотя и оказались менее связными, но обладают существенно более высоким коэффициентом кластеризации, чем графы активности сообществ в социальной сети. Таким образом, подтверждается то, что данные графы активности сообществ не обладают свойствами графов малого мира в той мере, в какой ими обладает «эталонная» модель роста и генерации такого графа. Для генерации подобного им графа (с потерей свойств «малого мира») необходимо создавать приблизительно вдвое больше дуг.

Заключение. Как мы видим, существующие алгоритмы роста графов малого мира несмотря на детерминированный характер позволяют моделировать рост сетей, в некотором роде сходных с реальными, однако учитывают так называемые «слабые» связи в меньшей мере, чем они фактически проявляются в современных социальных сетях.

Отличия в параметрах полученных графов объясняются также тем, что в графе активности не учитываются пользователи, не проявившие активности в определенный период (что приводит к занижению числа вершин и, вероятно, завышению средней степени связности оставшихся).

Уместно также заметить, что не все сообщества современных социальных сетей в полной мере соответствуют определению «малого мира».

В целом, детерминированные модели, подобные модели DMG и модели геометрического ассортативного роста, пригодны для генерации графов «малого мира» и могут быть использованы для имитации динамики роста сетей реального мира, но лишь после внесения модификаций.

Требования
к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы

Самостоятельная работа включает в себя повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам занятий; самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях; самостоятельный повтор действий, осуществляемых в ходе выполнения лабораторных работ, в том числе при работе со специальным программным обеспечением.

Результаты самостоятельной работы представляются и оформляются в виде ответов на основные положения теоретического и практического материала дисциплины по темам; письменного разбора процесса решения практических заданий и задач; собственных действий, осуществляемых в ходе выполнения лабораторных работ.

В случае подготовки слайдов для защиты проекта, они должны быть контрастными (рекомендуется черный цвет шрифта на светлом фоне), кегль текста слайдов – не менее 22pt, заголовков – 32pt. Основная цель использования слайдов - служить вспомогательным инструментом к подготовленному выступлению, цитирование больших фрагментов текста на слайдах не допускается. Приветствуется использование рисунков, графиков, таблиц, интерактивного материала, однако, следует предусмотреть выбор цвета и толщину линий.

Слайды должны содержать титульный лист, цели и задачи (не более 2-х слайдов с обзором актуальности, новизны, теоретической и практической значимости работы), основные публикации с их кратким обзором (1-2 слайда), формальную постановку задачи и формулировку моделей (1-2 слайда), краткое тезисное (!) изложение ключевых положений работы (разумное количество слайдов с учетом общего времени выступления), заключение (с изложением результатов работы, подведением выводов, обсуждением практического использования работы, возможностей проведения дальнейших исследований и разработок в данной области).

Как правило, 12-15 слайдов оказывается достаточным для полного представления работы.

Критерии оценки выполнения самостоятельной работы

Общие критерии оценки выполнения самостоятельной работы – правильность ответов на вопросы по темам теоретической части дисциплины, верность получаемых ответов в ходе решения практических заданий и задач, достижение правильного результата при осуществлении собственных действий по лабораторным работам.

Оценивание знаний в форме собеседования проводится по критериям:

- логичность изложения, знание и понимание основных аспектов и дискуссионных проблем по теме;
- владение методами и приемами анализа теоретических и/или практических аспектов по теме.

Оценивание знаний в форме проекта проводится по критериям:

- завершенность и полнота выполненных заданий в рамках проекта;
- владение методами и приемами решения конкретных задач и самостоятельность использования специализированного программного обеспечения; качество оформления письменного отчета в соответствии с правилами и стандартами оформления.

Приложение 2

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»

(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика»

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Паспорт ФОС

Формулировка требований	Этапы формирования требований	
Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Знает	методы научных исследований и основы организации научно-исследовательской деятельности в области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»
	Умеет	использовать современные методы исследований в области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»
	Владеет	информационно-коммуникационными технологиями исследований в области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»
Способность и готовность использовать стратегии формирования сетей и модели распространения потоков, объектов в экономических, финансовых, социальных и информационных сетях в рамках теории графов и комбинаторного анализа	Знает	стратегии формирования сетей и модели распространения потоков, объектов в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях
	Умеет	использовать современные методы исследований в области стратегии формирования сетей в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях
	Владеет	методами разработки и анализа моделей распространения потоков, объектов в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях

Шкала оценивания уровня сформированности требований

Код и формулировка требований	**Этапы формирования требований**		**критерии**	**показатели**
Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответств	знает (пороговый уровень)	методы научных исследований и основы организации научно-исследовательской деятельности в области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»	сформированные представления о методах научных исследований и основах организации научно-исследовательской деятельности в области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»	способность сформировать представления о методах научных исследований и основах организации научно-исследовательской деятельности в области

ующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий				«Графов, гиперграфов и комбинаторики»
	умеет (продвинутый)	использовать современные методы исследований в области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»	отбор и использование методов с учетом специфики всех дисциплин по профилю подготовки	способность отбора и использования методов с учетом специфики всех дисциплин по профилю подготовки
	владеет (высокий)	информационно-коммуникационными технологиями исследований в области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»	владение информационно-коммуникационными технологиями исследований во всей профессиональной области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»	способность владения информационно-коммуникационными технологиями исследований во всей профессиональной области «Графов, гиперграфов и комбинаторики»
Способность и готовность использовать стратегии формирования сетей и модели распространения потоков, волн, объектов в экономических, финансовых, социальных и информационных сетях в рамках теории графов и комбинаторного анализа	знает (пороговый уровень)	стратегии формирования сетей и модели распространения потоков, волн, объектов в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях	сформированные представления о стратегиях формирования сетей и модели распространения потоков, волн, объектов в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях	способность сформированных представлений о стратегиях формирования сетей и модели распространения потоков, волн, объектов в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях
	умеет (продвинутый)	использовать современные методы исследований в области стратегии формирования сетей в экономических, финансовых, социальных и аналитических сетях	отбор и использование методов с учетом специфики всех типов сетей	способность отбора и использования методов с учетом специфики всех типов сетей
	владеет (высокий)	методами разработки и анализа моделей распространения потоков, волн, объектов в экономических, финансовых, социальных и информационных сетях	владение методами разработки и анализа моделей распространения потоков, волн, объектов в экономических, финансовых, социальных и информационных сетях	способность владения методами разработки и анализа моделей распространения потоков, волн, объектов в экономических, финансовых, социальных и информационных сетях

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы для подготовки к экзамену
по дисциплине «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика»

1. История возникновения (работы Jacob Moreno, Anatol Rapoport, William Horvath).
2. Первые графовые модели.
3. Работы Stanley Milgram – эффект «маленького мира».
4. Введение в теорию шести рукопожатий.
5. Работы Barabási Albert-László введение в теорию «Управляемость сложных сетей» («Controllability of Complex Networks»).
6. Результаты эксперимента Mark Granovetter.
7. Предположение о важности слабых связей (weak ties).
8. Применение в торговле товарами и услугами, транспортных, энергетических, городских региональных, международных сетях.
9. Сети ОЭЗ и свободных портов.
10. Результаты Alfred Lotka, закон Лотки (сети цитирования).
11. Всемирная паутина (World Wide Web) - циклическая сеть.
12. Результаты Steven Strogatz и Duncan Watts - феномен тесного мира.
13. Работы Reka Albert и Laszlo Barabasi - распределение вершин по числу связей.
14. Сети предпочтений (Preference networks) - двусторонние информационные сети.
15. Радиус, эксцентриситет, геодезическая цепь.
16. Диаметр. Диаметр и деревья. Диаметры в случайных графах. Диаметры в мире.
17. Теорема о структуре сети.
18. Распределение степеней.
19. Кластеризация.
20. Модель гомофилии.
21. Динамика и сила слабых связей.
22. Центральность.
23. Возможности измерения центральности: степень – связность, близость и простота достижения других вершин.
24. Маршруты - роль промежуточных вершин и ребер.
25. Влияние. Престиж.
26. Центральность в сети - собственные вектора.
27. Применение мер центральности (Centrality).
28. Диффузия центральности.
29. Случайные сети.
30. Случайные сети - пороги и фазовые переходы.
31. Теорема Threshold.
32. Модель «маленького мира».

33. Другие статические модели сетей: модели для генерации кластеров, модели для получения другого распределения степеней, отличного от распределения Пуассона, модель подгонки данных.
34. Эксперимент Stanley Milgram.
35. Теория шести рукопожатий - модель «маленького мира» (small world).
36. Модель Duncan Watts и Steve Strogatz с высокой степенью кластеризации и малой средней длинной пути между вершинами.
37. Свойства социальной сети, как гомофилия (homophily) и слабые связи (weak ties).
38. Рост случайных сетей.
39. Аппроксимация.
40. Гибридные модели. Формирование гибридных моделей.
41. Блочные модели.
42. Случайные сетевые модели: Эрдеша (Erdos) – Реньи (Renyi).
43. Другие модели случайных сетей: Watts and Strogatz, Barabasi and Albert, Jackson and Rogers.
44. Стохастические блочные модели: модели дополнения Эрдеша (Erdos) – Реньи (Renyi)
45. Набор моделей: ERGMs и новые: SERGMs / SUGMs.
46. Стратегия формирования сети.
47. Равновесие и эффективность.
48. Модель соединения сети.
49. Эффективность модели соединения: попарное равновесие и модель соединений.
50. Внешние эффекты: формирование сети и трансферы.
51. Неоднородность в стратегии формирования сети.
52. Модель SUGMs и стратегия формирования сети.
53. Динамические стратегии формирования сети.
54. Эволюция и стохастика.
55. Режиссура формирования сети.
56. Применение структурной модели формирования стратегии.
57. Диффузия.
58. Bass - модель диффузии.
59. Диффузия на случайных сетях.
60. Главная компонента (Пуассона).
61. SIS – модель.
62. Решения SIS -модели – примеры.
63. Подготовка данных для модели диффузии. Пример распространения эпидемии.

Оценочные средства для текущего контроля

Вопросы для коллоквиума, собеседования
по дисциплине «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика»

Раздел 1. Основные понятия и определения

1. История возникновения (работы Jacob Moreno, Anatol Rapoport, William Horvath).
2. Первые графовые модели.
3. Работы Stanley Milgram – эффект «маленького мира».
4. Введение в теорию шести рукопожатий.
5. Работы Barabási Albert-László введение в теорию «Управляемость сложных сетей» («Controllability of Complex Networks»).
6. Результаты эксперимента Mark Granovetter.
7. Предположение о важности слабых связей (weak ties).
8. Применение в торговле товарами и услугами, транспортных, энергетических, городских региональных, международных сетях.
9. Сети ОЭЗ и свободных портов.
10. Результаты Alfred Lotka, закон Лотки (сети цитирования).
11. Всемирная паутина (World Wide Web) - циклическая сеть.
12. Результаты Steven Strogatz и Duncan Watts - феномен тесного мира.
13. Работы Reka Albert и Laszlo Barabasi - распределение вершин по числу связей.
14. Сети предпочтений (Preference networks) - двусторонние информационные сети.
15. Радиус, эксцентриситет, геодезическая цепь.
16. Диаметр. Диаметр и деревья. Диаметры в случайных графах. Диаметры в мире.
17. Теорема о структуре сети.
18. Распределение степеней.
19. Кластеризация.
20. Модель гомофилии.
21. Динамика и сила слабых связей.
22. Центральность.
23. Возможности измерения центральности: степень – связность, близость и простота достижения других вершин.
24. Маршруты - роль промежуточных вершин и ребер.
25. Влияние. Престиж.
26. Центральность в сети - собственные вектора.
27. Применение мер центральности (Centrality).
28. Диффузия центральности.
29. Случайные сети.
30. Случайные сети - пороги и фазовые переходы.
31. Теорема Threshold.
32. Модель «маленького мира».

33. Другие статические модели сетей: модели для генерации кластеров, модели для получения другого распределения степеней, отличного от распределения Пуассона, модель подгонки данных.

Раздел 2. Модель «маленького мира»

1. Эксперимент Stanley Milgram.
2. Теория шести рукопожатий - модель «маленького мира» (small world).
3. Модель Duncan Watts и Steve Strogatz с высокой степенью кластеризации и малой средней длинной пути между вершинами.
4. Свойства социальной сети, как гомофилия (homophily) и слабые связи (weak ties).

Раздел 3. Случайные сети

1. Рост случайных сетей.
2. Аппроксимация.
3. Гибридные модели. Формирование гибридных моделей.
4. Блочные модели.
5. Случайные сетевые модели: Эрдеша (Erdos) – Реньи (Renyi).
6. Другие модели случайных сетей: Watts and Strogatz, Barabasi and Albert, Jackson and Rogers.
7. Стохастические блочные модели: модели дополнения Эрдеша (Erdos) – Реньи (Renyi)
8. Набор моделей: ERGMs и новые: SERGMs / SUGMs.

Раздел 4. Стратегия формирования сети

1. Стратегия формирования сети.
2. Равновесие и эффективность.
3. Модель соединения сети.
4. Эффективность модели соединения: попарное равновесие и модель соединений.
5. Внешние эффекты: формирование сети и трансферы.
6. Неоднородность в стратегии формирования сети.
7. Модель SUGMs и стратегия формирования сети.
9. Динамические стратегии формирования сети.
10. Эволюция и стохастика.
11. Режиссура формирования сети.
12. Применение структурной модели формирования стратегии.

Раздел 5. Диффузия и обучение в сетях. Игры на сетях.

1. Диффузия.
2. Bass - модель диффузии.
3. Диффузия на случайных сетях.
4. Главная компонента (Пуассона).
5. SIS – модель.
6. Решения SIS -модели – примеры.
7. Подготовка данных для модели диффузии. Пример распространения эпидемии.
8. Обучение.

9. Модель ДеГроота (DeGroot).
10. Конвергенция в модели ДеГроота (DeGroot).
11. Дополнения и заменители.
12. Свойства равновесий.
13. Несколько равновесий. Применения.
14. Дискретный (бинарный) выбор.
15. Линейные и квадратичные модели.
16. Многошаговые игры на сетях.

Темы индивидуальных творческих проектов
по дисциплине «Теория графов, гиперграфов и комбинаторика»

- История возникновения (работы Jacob Moreno, Anatol Rapoport, William Horvath).
- Первые графовые модели.
- Работы Stanley Milgram – эффект «маленького мира».
- Введение в теорию шести рукопожатий.
- Работы Barabási Albert-László введение в теорию «Управляемость сложных сетей» («Controllability of Complex Networks»).
- Результаты эксперимента Mark Granovetter.
- Предположение о важности слабых связей (weak ties).
- Применение в торговле товарами и услугами, транспортных, энергетических, городских региональных, международных сетях.
- Сети ОЭЗ и свободных портов.
- Результаты Alfred Lotka, закон Лотки (сети цитирования).
- Всемирная паутина (World Wide Web) - циклическая сеть.
- Результаты Steven Strogatz и Duncan Watts - феномен тесного мира.
- Работы Reka Albert и Laszlo Barabasi - распределение вершин по числу связей.
- Сети предпочтений (Preference networks) - двусторонние информационные сети.
- Радиус, эксцентриситет, геодезическая цепь.
- Диаметр. Диаметр и деревья. Диаметры в случайных графах. Диаметры в мире.
- Теорема о структуре сети.
- Распределение степеней.
- Кластеризация.
- Модель гомофилии.
- Динамика и сила слабых связей.
- Центральность.
- Возможности измерения центральности: степень – связность, близость и простота достижения других вершин.
- Маршруты - роль промежуточных вершин и ребер.
- Влияние. Престиж.
- Центральность в сети - собственные вектора.

- Применение мер центральности (Centrality).
- Диффузия центральности.
- Случайные сети.
- Случайные сети - пороги и фазовые переходы.
- Теорема Threshold.
- Модель «маленького мира».
- Другие статические модели сетей: модели для генерации кластеров, модели для получения другого распределения степеней, отличного от распределения Пуассона, модель подгонки данных.
- Эксперимент Stanley Milgram.
- Теория шести рукопожатий - модель «маленького мира» (small world).
- Модель Duncan Watts и Steve Strogatz с высокой степенью кластеризации и малой средней длинной пути между вершинами.
- Свойства социальной сети, как гомофилия (homophily) и слабые связи (weak ties).
- Рост случайных сетей.
- Аппроксимация.
- Гибридные модели. Формирование гибридных моделей.
- Блочные модели.
- Случайные сетевые модели: Эрдеша (Erdos) – Реньи (Renyi).
- Другие модели случайных сетей: Watts and Strogatz, Barabasi and Albert, Jackson and Rogers.
- Стохастические блочные модели: модели дополнения Эрдеша (Erdos) – Реньи (Renyi)
- Набор моделей: ERGMs и новые: SERGMs / SUGMs.
- Стратегия формирования сети.
- Равновесие и эффективность.
- Модель соединения сети.
- Эффективность модели соединения: попарное равновесие и модель соединений.
- Внешние эффекты: формирование сети и трансферы.
- Неоднородность в стратегии формирования сети.
- Модель SUGMs и стратегия формирования сети.
- Равновесие по Нэшу.
- Динамические стратегии формирования сети.
- Эволюция и стохастика.
- Режиссура формирования сети.
- Применение структурной модели формирования стратегии.
- Диффузия.
- Bass - модель диффузии.
- Диффузия на случайных сетях.
- Главная компонента (Пуассона).
- SIS – модель.

- Решения SIS -модели – примеры.
- Подготовка данных для модели диффузии. Пример распространения эпидемии.
- Обучение.
- Модель ДеГрута (DeGroot).
- Конвергенция в модели ДеГрута (DeGroot).
- Дополнения и заменители.
- Свойства равновесий.
- Несколько равновесий. Применения.
- Дискретный (бинарный) выбор.
- Линейные и квадратичные модели.
- Многошаговые игры на сетях.